

Летние учебно-тренировочные сборы по астрономии

Теоретический тур — IOAA

28 июня – 12 июля 2016 года

Короткие задачи

Задача 1. Багровый ужас

И.А. Утешев

«Расстояния до звёзд столь велики, что никакие астрономические инструменты не дают возможности наблюдать непосредственно их диски. Лишь у некоторых звёзд угловые размеры диска превышают разрешающую способность крупных телескопов, что дает возможность фотографированием с очень короткими экспозициями “восстановить” изображение звезды.» (По материалам Astronet.ru)

Тем не менее, какие-то разведанные у нас есть. Для некоторой яркой звезды ($m_{\text{bol}} = 0.9$) измерения углового диаметра дали значение $\gamma \approx 10 \text{ mas}$. Какого она цвета?

Решение:

Сравним создаваемую звездой освещённость $E = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} = \frac{\gamma^2 \sigma}{4} T^4$ с солнечной постоянной $E_{\odot}$.

Формула Погсона: $\frac{E}{E_{\odot}} = 10^{0.4(m_{\odot} - m)} \Rightarrow T \approx 4200 \text{ K}$, что соответствует оранжевому цвету звезды.

Задача 2. Циклотрон

И.А. Утешев

Циклотронной частотой f называют частоту обращения заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$.

а) Запишите соотношение между f , $\vec{B}$, зарядом частицы q и её массой m .

б) Найдите модуль индукции магнитного поля B_{MW} , при которой циклотонная частота свободных электронов совпадает с используемой в микроволновых печах $f_{\text{MW}} = 2.45 \text{ ГГц}$.

Решение:

Второй закон Ньютона для частицы, движущейся по ларморовской окружности: $m\omega^2 r = q|\vec{B}|\omega r$. С учётом соотношения $f = \omega/2\pi$ получаем $f = \frac{q|\vec{B}|}{2\pi m}$. Расчёт для электрона даёт $B_{\text{MW}} = \frac{2\pi m_e f_{\text{MW}}}{e} = 87.5 \text{ мТл}$.

Задача 3. День Луны

И.А. Утешев

В последний день XLVI Международной физической олимпиады, 17 июля 2016 года Луна пересекает меридиан Цюриха в 23:46 (центральноевропейского времени). В августе 2016 года произойдёт полутеневое лунное затмение продолжительностью около получаса. Найдите его дату и охарактеризуйте условия наблюдения в Цюрихе. Орбиты Луны и Земли считать круговыми, рефракцией и угловыми размерами Луны, уравниванием времени пренебречь.

Город	Цюрих
Страна	Швейцария
Кантон	Цюрих
Округ	Цюрих
Координаты	Н 47° 23' Е 8° 32'
Часовой пояс	UTC+1
Площадь	92 км ²
Высота центра	408 м
Население	400 тыс.
Агломерация	1.2 млн
Летнее время	Да, +1
Автомобильный код	ZH

Решение:

17 июля Цюрих использует летнее время UTC+2. По местному времени Луна кульминирует в $23^h 46^m - 2^h + \{8^\circ 32'\} = 22^h 20^m$. Разность прямых восхождений Луны и Солнца составляет $22^h 20^m - 12^h = 10^h 20^m$. До августовского полнолуния нужно добрать ещё $12^h + (24^h - 10^h 20^m) = 25^h 40^m$, что соответствует $29.53^d \times 25^h 40^m / 24^h = 31.6^d$. Затмение произойдёт 18 августа около полудня. Увидеть его будет невозможно.

Задача 4. Аккреция на нейтронную звезду

В.В. Григорьев

На нейтронную звезду радиусом $R = 10$ км и массой $M = 1.4M_\odot$ происходит аккреция холодного межзвездного газа с темпом 10^{15} г/с. Из-за магнитного поля, искажающего сферическую аккрецию, вещество выпадает на две площадки в районе полюсов нейтронной звезды, суммарная площадь которых составляет 2 км². Считая, нагрев и свечение полюсов нейтронной звезды происходят благодаря полной передаче энергии аккрецирующего вещества поверхности нейтронной звезды, определите температуру её полярных областей.

Решение:

Светимость определяется полной передачей энергии аккрецирующего вещества, то есть вся потенциальная энергия переходит в тепловую. Если обозначить темп аккреции как $\dot{M}$, то очевидно, что $L = GM\dot{M}/R$, а внутренней энергией газа мы пренебрегаем в виду ее малости. Приближая светимость полюсов чернотельным, можно написать: $L = S\sigma T^4$. Теперь можно выразить искомую температуру и вычислить (все величины в СИ):

$$T = \left(\frac{GM\dot{M}}{RS\sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{6.672 \cdot 10^{-11} \times 1.4 \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \times 10^{12}}{10^4 \times 2 \cdot 10^6 \times 5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} \approx (1.64 \cdot 10^{29})^{1/4} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ К}$$

Задача 5. Dolce Vita

И.А. Утешев

Оцените, во сколько раз отличаются количества видимых звёзд на квадратный градус в зените при наблюдениях в чистом поле и лёжа на дне бассейна глубиной в два метра в алмазных очках для плавания?

Показатель преломления $n_w = 1.33$, алмаза $n_d = 2.42$, температура воздуха $t_a = +26^\circ \text{C}$. Поглощением, дисперсией и поляризацией света в средах можно пренебречь, границы раздела сред гладкие, звёзды распределены в пространстве равномерно.

Подсказка. В случае нормального падения света на границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 энергетический коэффициент отражения

$$R = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right|^2.$$

Решение:

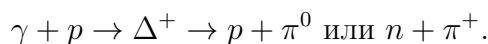
Коэффициент пропускания $T = 1 - R = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$. Чтобы попасть в глаз наблюдателя в бассейне, свет должен пройти три границы раздела (воздух–вода, вода–алмаз и алмаз–воздух). С учётом $n_a = 1.00$ результирующий коэффициент пропускания $\tau = \frac{4n_w}{(1 + n_w)^2} \times \frac{4n_w n_d}{(n_w + n_d)^2} \times \frac{4n_d}{(n_d + 1)^2} \simeq 0.74$.

Потеря в проникающей способности означает уменьшение количества видимых звёзд. Угловые масштабы на переходе воздух–...–воздух не искажаются. По сравнению с наземным наблюдателем, «горизонт видимости» дайвера стал ближе в $\tau^{-0.5} = 1.16$ раз, количество видимых звёзд уменьшилось в $\tau^{-1.5} \simeq 1.6$ раза.

Задача 6. Предел ГЗК

И.А. Утешев

В 1966 году Георгием Зацепиным и Вадимом Кузьминым, и независимо от них Кеннетом Грайзенем было предсказано, что протоны с энергией выше определённого порога взаимодействуют с фотонами, рождая пионы:



Эта реакция приводит к тому, что космическое пространство, заполненное реликтовым излучением, становится непрозрачным для ультрарелятивистских протонов, поэтому они не могут наблюдаться в космических лучах.

Оцените пороговую энергию протона, при которой возможен описанный процесс. Массы протона и нейтрона $M \simeq 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряженного и нейтрального пионов $m \simeq 2.4 \cdot 10^{-28}$ кг.

Подсказка. Энергия, импульс и масса частицы связаны соотношением $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$.

Решение:

Пороговая энергия соответствует лобовому столкновению частиц, после которого продукты покоятся относительно друг друга. Энергия фотона $\sim kT$, где $T \approx 3$ К — температура реликтового излучения. Импульс и энергия системы сохраняются:

$$\begin{cases} \sqrt{E^2 - M^2 c^4} - kT = pc; \\ E + kT = \sqrt{p^2 c^2 + (M + m)^2 c^4}. \end{cases} \Rightarrow E \simeq \frac{((M + m)^2 - m^2) c^4}{4kT} = 50 \text{ Дж} = \boxed{3 \cdot 10^{20} \text{ эВ}}$$

Задача 7. Вращающийся наблюдатель

М.И. Волобуева

Спутник движется в обратном направлении по круговой экваториальной орбите на высоте $h = 5000$ км. Определите видимые угловые скорости спутника в моменты, когда он находится в зените и на горизонте для наблюдателя на экваторе Земли. Ответ выразите в угловых минутах в секунду.

Решение:

Геоцентрическая скорость спутника $V_{\text{абс}} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} = 5.9$ км/с.

Закон сложения скоростей: $\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}}$. Пусть $\omega_{\oplus}$ — угловая скорость вращения Земли, тогда

$V_{\text{отн}} = V_{\text{абс}} + \omega_{\oplus} \cdot (R_{\oplus} + h) = 6.7 \text{ км/с}$. Относительная линейная скорость спутника $V_{\text{отн}}$ не зависит от положения наблюдателя!

Искомые угловые скорости: $\omega_{\text{зен}} = \frac{V_{\text{rel}}}{h} = 4.6' / \text{с}$,

$$\omega_{\text{гор}} = \frac{V_{\tau}}{\sqrt{(R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus}^2}} = \frac{V_{\text{отн}}}{\sqrt{(R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus}^2}} \cdot \frac{\sqrt{(R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus}^2}}{(R_{\oplus} + h)} = \frac{V_{\text{отн}}}{(R_{\oplus} + h)} = 2.0' / \text{с}.$$

Задача 8. Северная столица

М.И. Волобуева

Определите длину тени на горизонтальной поверхности от вертикальной мачты с высотой $H = 8 \text{ м}$ и диаметром $D = 20 \text{ см}$ в местный солнечный полдень в день зимнего солнцестояния в Петербурге ($\varphi = 60^\circ$). Угловой размер Солнца равен $\rho_{\odot} = 32'$.

Решение:

Высота Солнца над горизонтом в верхней кульминации $h = 90^\circ - \varphi - \varepsilon = 6^\circ 34'$. Если бы Солнце являлось бесконечно удаленным точечным источником, то длина тени на горизонтальной поверхности составила бы $\frac{H}{\text{tg } h} = 86.9 \text{ м}$. Но Солнце является протяженным источником, поэтому длина тени (в пространстве)

конечна и составляет $\frac{D}{\rho_{\odot}} = 21.5 \text{ м}$. На горизонтальную поверхность мачта будет отбрасывать тень длиной $\frac{D \cdot \cos h}{\rho_{\odot}} = 21.3 \text{ м}$.

Задача 9. Энергия вакуума

И.А. Утешев

Определите отношение плотности энергии реликтового излучения (температура $T \approx 3 \text{ К}$) к плотности энергии покоя протонов в межгалактическом веществе (концентрация $n \sim 1 \text{ м}^{-3}$).

Решение:

Плотность энергии покоя протонов $w_p = nm_p c^2 = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж/м}^3$.

Реликтовое излучение чернотельно. Рассмотрим чёрную площадку, находящуюся в термодинамическом равновесии с фотонным газом: $\sigma T^4 \cdot \delta s \cdot dt = \frac{1}{4} w_{\gamma} \cdot \delta s \cdot c dt \Rightarrow w_{\gamma} = \frac{4\sigma T^4}{c} = 6.1 \cdot 10^{-14} \text{ Дж/м}^3$.

Искомое отношение $w_{\gamma}/w_p \simeq 4 \cdot 10^{-4}$.

Задача 10. Мегамазер

М.И. Волобуева

В туманности Клеймана-Лоу наблюдают компактный радиоисточник в мазерной линии водяного пара $\lambda = 1.35 \text{ см}$. Известно, что источник имеет радиус около 0.05 а.е. , а его яркостная температура на данной длине волны достигает 10^{17} К . Оцените расстояние до источника, если измеренная плотность потока излучения от него составила 1.7 МЯн .

Решение:

Плотность потока излучения равна $S_{\nu} = 1.7 \text{ МЯн} = 1.7 \cdot 10^{-20} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{Гц)}$ и связана с яркостью источника соотношением $S_{\nu} = B_{\nu} \Omega$, где $\Omega = \pi R^2/d^2$ — телесный угол, под которым виден источник. По формуле

$$\text{Рэля-Джинса } B_{\nu} = 2kT_b \nu^2/c^2 = 2kT_b/\lambda^2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2\pi R^2 kT_b}{S_{\nu} \lambda^2}} \approx 400 \text{ пк}.$$

Задача 11. Две фамилии

И.А. Утешев

Межгалактический маяк представляет собой изотропный, компактный и яркий источник. Для земного наблюдателя его болометрическая звёздная величина $m = 5.2$. Какую болометрическую величину маяка m' измерят на ракете «Нейтрон», пролетающей мимо солнечной системы со скоростью $v = 0.7c$ в сторону маяка?

Решение:

В системе отсчёта ракеты изменяются частоты фотонов: $k_1 = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$, изменяется их концентрация (лоренцево сокращение): $k_2 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$. Формула Погсона: $m' = m - 2.5 \log(k_1 k_2) = m - 2.5 \log \frac{c}{c-v} = 3.9$.

Задача 12. Pas de deux

И.А. Утешев

В момент захода Солнца азимут центра его диска был равен $A_0 = 98.0^\circ$, а скорость изменения этой величины составляла $b = 12.87'/\text{мин}$. Найдите дату наблюдения. Уравнение времени было положительным. Рефракцией пренебречь.

Решение:

Теорема синусов для $\triangle PZ\odot$: $\cos h \sin A = \cos \delta_\odot \sin t$. Скорость изменения азимута $b = |dA/dt| \cdot 15^\circ/\text{час}$. Дифференцируя теорему синусов и подставляя $h_0 = 0$, получаем

$$\begin{cases} \sin A_0 = \cos \delta_\odot \sin t; \\ \cos A_0 \cdot |dA/dt| = \cos \delta_\odot \cos t. \end{cases}$$

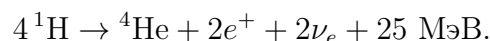
Возведём в квадрат и сложим: $\cos^2 \delta_\odot = 1 - \cos^2 A_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right)$, откуда $\delta_\odot = \pm 4.1^\circ$.

День наблюдения отстоит от равноденствия на 10 суток. Окрестность осеннего равноденствия не подходит, ведь по условию $\eta < 0$. Отрицательное склонение тоже не подходит — точка захода смещена к северу. Наблюдения производились (примерно) 1 апреля.

Задача 13. Нейтрино

И.А. Утешев, IPhO-2015-T1-B1,2

В 1938 году Бете предположил, что ядерная реакция синтеза гелия из водорода, происходящая в ядре Солнца, — это его источник энергии. Результирующее уравнение ядерной реакции:



Электронные нейтрино ν_e , которые получаются в этой реакции, можно считать безмассовыми. Они вылетают из Солнца и их обнаружение на Земле подтверждает то, что внутри Солнца происходят ядерные реакции.

а) Рассчитайте плотность потока нейтрино Φ_ν , достигающих Земли. Считайте, что энергия, излучаемая Солнцем, полностью получается в реакции, приведенной выше. Вы можете пренебречь энергией, уносимой нейтрино.

На пути к Земле часть электронных нейтрино превращается в нейтрино других типов ν_* . Эффективность детектирования ν_* составляет $1/6$ эффективности детектирования ν_e .

Если бы не происходило превращения нейтрино, мы бы детектировали N_1 нейтрино в год. Однако из-за этих превращений детектируется N_2 нейтрино в год (ν_e и ν_* вместе).

б) Какая доля f частиц ν_e превращается в ν_* , если $N_1/N_2 = 2.25$?

Решение:

На каждые $\delta E = 25$ МэВ солнечной энергии приходится 2 нейтрино. Тогда искомый поток нейтрино $\Phi_\nu = 2 \times \frac{E_\odot}{\delta E} \approx 7 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}$, где $E_\odot$ — солнечная постоянная.

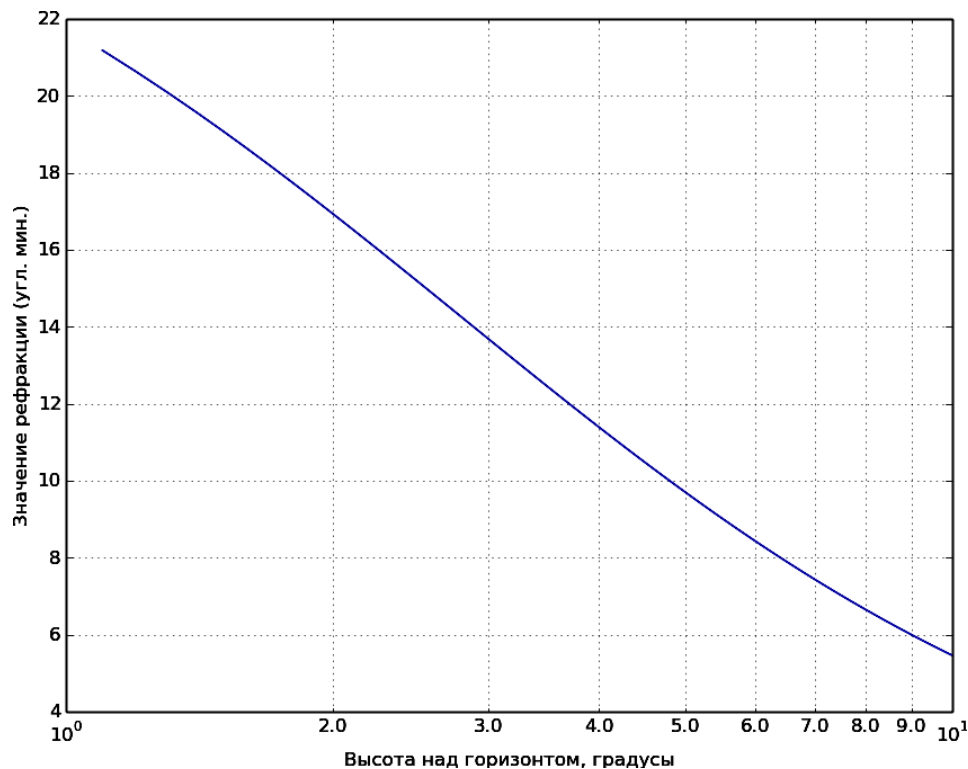
Связь количеств детектируемых нейтрино: $N_2 = N_1 \left((1-f) + \frac{1}{6}f \right) \Rightarrow$ доля $f = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right) = \frac{2}{3}$.

Задача 14. Быть, а не казаться

К.А. Гришин, под ред. И.А. Утешева

Производится фотографирование области неба размером $10.0'$ по высоте и $10.0'$ по азимуту на высоте 2.7° над горизонтом. Определите истинные угловые размеры этой области. Зависимость величины атмосферной рефракции R от *истинной* высоты светила h имеет следующий приближённый вид (график соответствует приведённому ниже выражению):

$$R = \frac{1.02'}{\tan \left(h + \frac{(3.21^\circ)^2}{h + 5.11^\circ} \right)}.$$

**Решение:**

Единственное явление, которое должно принять во внимание — атмосферная рефракция. Она не изменяет азимута светил. С уменьшением высоты величина рефракции заметно растёт, из-за чего, например, диск закатного Солнца выглядит «огурцоидом». Истинное поле зрения в действительности немного больше по высоте на $\delta h \simeq -\frac{dR}{dh} \times \Delta h = 50 \cdot 10^{-3} \times 10.0' = 0.5'$. Искомые размеры — $10.0'$ азимута $\times$ $10.5'$ высоты. Отметим, производную проще посчитать «в лоб» $\left(\frac{R(x+\delta x) - R(x)}{\delta x} \right)$ из-за логарифмической разметки оси абсцисс на приведённом в условии графике.

Задача 15. Истина в Вине

К.А. Гришин, И.А. Утешев

В радиодиапазоне наблюдаются два абсолютно чёрных объекта с совпадающими физическими характеристиками. Один находится в нашей галактике, а другой — в галактике с красным смещением $Z = 0.1$. Их температуры больше эффективной температуры Солнца.

Найдите отношение “наблюдаемых” светимостей данных объектов в узкой полосе длин радиоволн. “Наблюдаемая” светимость = освещённость $\times 4\pi(\text{расстояние до объекта в момент приёма})^2$.

Решение:

Пусть фотоны были излучены в момент времени t_e и приняты в t_0 . «Путешествуя», они покраснели и поредели (увеличились длины волн и расстояние между ними). При светимости источника L создаваемая им освещённость $E = \frac{L}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \cdot \frac{a(t_e)}{a(t_0)}$, где r_0 — расстояние в момент приёма. С учётом $a(t_0)/a(t_e) = 1 + z$ “наблюдаемая” светимость $L^* = L(1 + z)^{-2}$.

Положим, приёмник настроен на полосу $\mathfrak{R}_1: [\lambda_0 \pm \delta\lambda]$. Принимаемое от источника излучение было излучено не в $\mathfrak{R}_1$, а в $\mathfrak{R}_2: \left[\frac{\lambda_0}{1+z} \pm \frac{\delta\lambda}{1+z} \right]$. В условиях задачи можно пользоваться приближением Рэлея – Джинса. В полосе $\mathfrak{R}_1$ светимость $L_1 = \text{const} \cdot \lambda_0^{-4} \delta\lambda$, а в полосе $\mathfrak{R}_2$ (из пропорциональности) — $L_2 = L_1(1 + z)^3$.

Искомое отношение $\frac{L_1^*}{L_2^*} = \frac{L_1}{L_2(1 + Z)^{-2}} = (1 + Z)^{-1} \simeq 1 - Z = 0.9$. “Наблюдаемая” светимость дальнего источника больше!