

Летние учебно-тренировочные сборы по астрономии

Теоретический тур — IOAA

28 июня – 12 июля 2016 года

Длинные задачи

Задача 1. Звёздное трио

М.А. Пирогов

Цивилизация, живущая на далёкой планете, построила и запустила устойчивый к высоким температурам звездолёт. Их целью было за одну экспедицию изучить сразу две близлежащие звезды. Траектория движения должна была выглядеть примерно так:

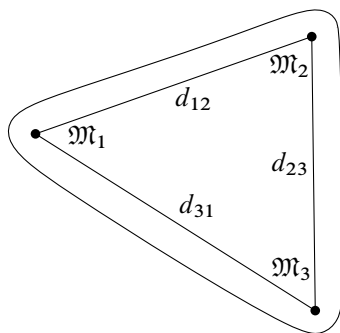


Рис. 1: Инопланетяне обитают на планете около звезды с массой M_1 ; её большая полуось составляет 0.5 а.е.

Вам дан фрагмент звёздного каталога жителей этой планеты, в котором представлены прямые восхождения, склонения и параллаксы звёзд 2 и 3, все величины переведены в земные единицы, однако параллакс определён аналогично нашему для их системы.

№	α	δ	π
2	$12^h 34^m$	$80^\circ 12'$	$0.05''$
3	$8^h 6^m$	$12^\circ 27'$	$0.04''$

Считая, что прицельные расстояния пролёта мимо всех звёзд одинаковы и равны $q = 0.1$ а.е., а скорость звездолёта на бесконечности была бы $v_\infty = 70$ км/с:

- Найдите расстояния d_{12} , d_{23} , d_{31} и соответствующие им углы треугольника α_1 , α_2 , α_3 .
- Оцените время перелёта.
- Оцените массы звёзд M_1 , M_2 и M_3 .
- Выясните, к какой из звёзд аппарат приблизится сильнее всего и оцените это расстояние. Зацепит ли он её поверхность, если она лежит на главной последовательности?

Относительные движения звёзд не учитывать.

Решение:

а) В этом пункте надо просто перевести параллаксы в расстояния и решить треугольник. В формуле для расстояния в числителе вместо 1 будет 0.5, т.к. большая полуось планеты в 2 раза меньше земной:

$$d_{12} = \frac{0.5}{\pi_2} = \frac{0.5}{0.05''} = 10 \text{ пк}$$

$$d_{31} = \frac{0.5}{\pi_3} = \frac{0.5}{0.04''} = 12.5 \text{ пк.}$$

Используя сферическую теорему косинусов, можно найти угол между звёздами 2 и 3 на небе первой:

$$\varphi_1 = \arccos(\sin \delta_2 \sin \delta_3 + \cos \delta_2 \cos \delta_3 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)) \approx 73^\circ 54'.$$

Теперь с помощью обычной теоремы косинусов найдём d_{23} :

$$d_{23} = \sqrt{d_{12}^2 + d_{31}^2 - 2d_{12}d_{31} \cos \varphi_1} \approx 13.7 \text{ пк.}$$

Оставшиеся два угла найдём с помощью теоремы синусов:

$$\frac{d_{31}}{\sin \varphi_2} = \frac{d_{23}}{\sin \varphi_1} \Rightarrow \varphi_2 = \arcsin \left(d_{31} \frac{\sin \varphi_1}{d_{23}} \right) \approx 61^\circ 14'.$$

$$\frac{d_{12}}{\sin \varphi_3} = \frac{d_{23}}{\sin \varphi_1} \Rightarrow \varphi_3 = \arcsin \left(d_{12} \frac{\sin \varphi_1}{d_{23}} \right) \approx 44^\circ 32'.$$

б) На расстояниях порядка расстояний между звёздами для оценки можно считать, что гравитационный потенциал мал, и звездолёт движется равномерно и прямолинейно примерно с той же скоростью, что и на бесконечности. Вблизи звёзд его скорость резко возрастает, и он находится там не очень долго, поэтому для оценки продолжительности полёта с порядковой точностью этими моментами вполне допустимо пренебречь.

$$t \approx \frac{d_{12} + d_{23} + d_{31}}{v_\infty} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ лет.}$$

с) По тем же причинам, что и в предыдущем пункте, можно считать, что вблизи каждой из звёзд звездолёт движется по гиперболе. Необходимо связать массу звезды, скорость на бесконечности и прицельное расстояние между собой. Заметим, что прямоугольные треугольники OAP и OMH равны по гипотенузе и углу. Это значит, что $b = q$. Значит,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} = \frac{q}{a}.$$

Выразим теперь большую полуось гиперболы через скорость. Запишем интеграл энергии:

$$v = \sqrt{G\mathfrak{M} \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}.$$

При $r \rightarrow \infty$ скорость стремится к $v_\infty = \sqrt{\frac{G\mathfrak{M}}{a}} \Rightarrow a = \frac{G\mathfrak{M}}{v_\infty^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{qv_\infty^2}{G\mathfrak{M}}$, а значит,

$$\mathfrak{M} = \frac{qv_\infty^2}{G} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Используя эту формулу, находим

$$\mathfrak{M}_1 \approx 0.7\mathfrak{M}_\odot,$$

$$\mathfrak{M}_2 \approx 0.9\mathfrak{M}_\odot,$$

$$\mathfrak{M}_3 \approx 1.3\mathfrak{M}_\odot.$$

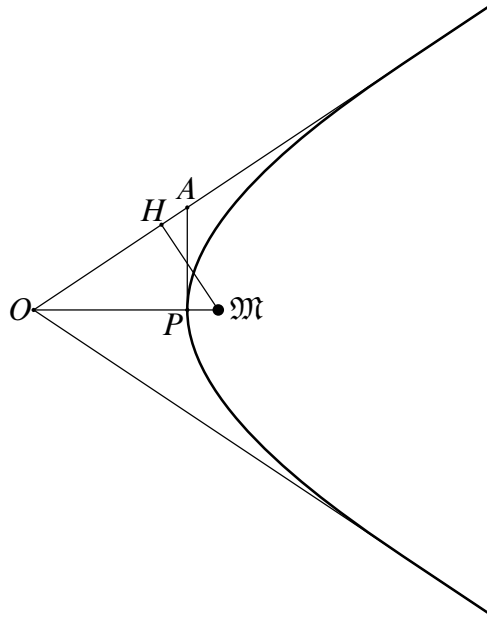


Рис. 2: $OM = OA = c$; $AP = b$; $HM = q$.

d) Мы уже обладаем почти всеми данными, которые нам нужны. Найдём эксцентриситет гиперболы ε . Заметим, что

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

При этом перигелийное расстояние

$$\begin{aligned} p = a(\varepsilon - 1) &= q \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} - 1 \right) = q \cdot \frac{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \\ &= q \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}} = q \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}. \end{aligned}$$

Значит, оно будет минимальным у третьей звезды, т.к. φ_3 минимален. Теперь несложно его посчитать:

$$p_3 = 0.1 \cdot \operatorname{tg} \frac{44^\circ 32'}{4} \approx 4.2 R_\odot.$$

Учитывая, что третья звезда несколько тяжелее Солнца, звездолёт и правда пролетит очень близко к поверхности звезды! Её радиус можно оценить следующим образом:

$$R_3 \approx R_\odot \cdot \left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot} \right)^{\frac{3.9}{5.2}} \approx 1.2 R_\odot.$$

Значит, он вряд ли зацепит поверхность. Тем не менее, инопланетным инженерам явно пришлось хорошо постараться ☺.

Задача 2. Коронадо

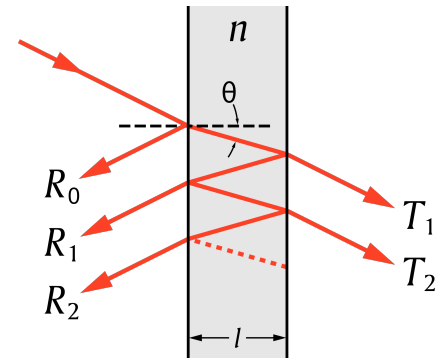
И.А. Утешев

Одна из разновидностей спектральных фильтров основана на эталоне Фабри – Перо. Такой фильтр представляет собой два соосных, параллельно расположенных и обращенных друг к другу зеркала, между которыми формируется резонансная стоячая оптическая волна:

Если оба зеркала имеют коэффициент отражения R , функция пропускания фильтром света с длиной волны λ имеет вид

$$T = \frac{1}{1 + F \sin^2 \delta}, \quad \text{где } F \equiv \frac{4R}{(1 - R)^2}, \quad \delta \equiv \frac{2\pi n l \cos \theta}{\lambda}.$$

Рассмотрим фильтр нормального падения, целевой максимум пропускания которого приходится на линию Бальмера H_α (длина волны $\lambda_0 = 6562.8 \text{ \AA}$). Пространство между зеркалами заполнено газообразным гелием (показатель преломления $n = 1.0000$), длина $l = 120.0 \text{ мкм}$, $(1 - R) = 0.018$.



- Рассчитайте FSR фильтра — расстояние $\Delta\lambda$ между двумя соседними максимумами пропускания в окрестности λ_0 .
- Рассчитайте FWHM фильтра — ширину $\delta\lambda$ спектрального диапазона, включающего λ_0 , пропускание на котором составляет не менее половины от максимального.
- Оцените добротность фильтра $Q = \Delta\lambda/\delta\lambda$.
- Найдите ширину диапазона скоростей δv , соответствующих целевой полосе пропускания этого фильтра.

Решение:

a)

$$\Delta\delta = \pi \Rightarrow \Delta\lambda \simeq \frac{\lambda_0^2}{2l} = \boxed{18.0 \text{ \AA}}$$

b)

$$\frac{1}{1 + F \sin^2 \delta^*} = \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \delta^* \simeq \delta^{*2} \simeq \left(\frac{2\pi l \delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)^2 \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\pi l \sqrt{F}} = \frac{2\Delta\lambda}{\pi \sqrt{F}} = \boxed{0.10 \text{ \AA}}$$

c)

$$Q \simeq \frac{\pi \sqrt{F}}{2} \approx \boxed{2 \cdot 10^2}$$

Комментарий. Как видно, зависимость $T(\lambda)$ — квазипериодическая, а FSR фильтра Фабри – Перо невелик, поэтому последовательно с этим фильтром обычно ставят более «грубый», отсекающий лишние максимумы.

d)

$$\delta v = c \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \boxed{4.6 \text{ км/с}}$$

Задача 3. Годограф

И.А. Утешев

Тело движется в центральном гравитационном поле звезды массы M . Плоскость орбиты разбита на секторы с общей вершиной в центре звезды и одинаковыми малыми углами раствора $\Delta\varphi$. Удельный орбитальный момент импульса тела $\vec{l}$.

а) Найдите изменение скорости спутника $|\Delta\vec{v}|$ при прохождении каждого сектора.

Годографом называют кривую, соединяющую концы вектора переменной величины, отложенного в разные моменты времени от одной точки. Так, известно, что годограф совершающего кеплерово движение тела представляет собой окружность или дугу окружности.

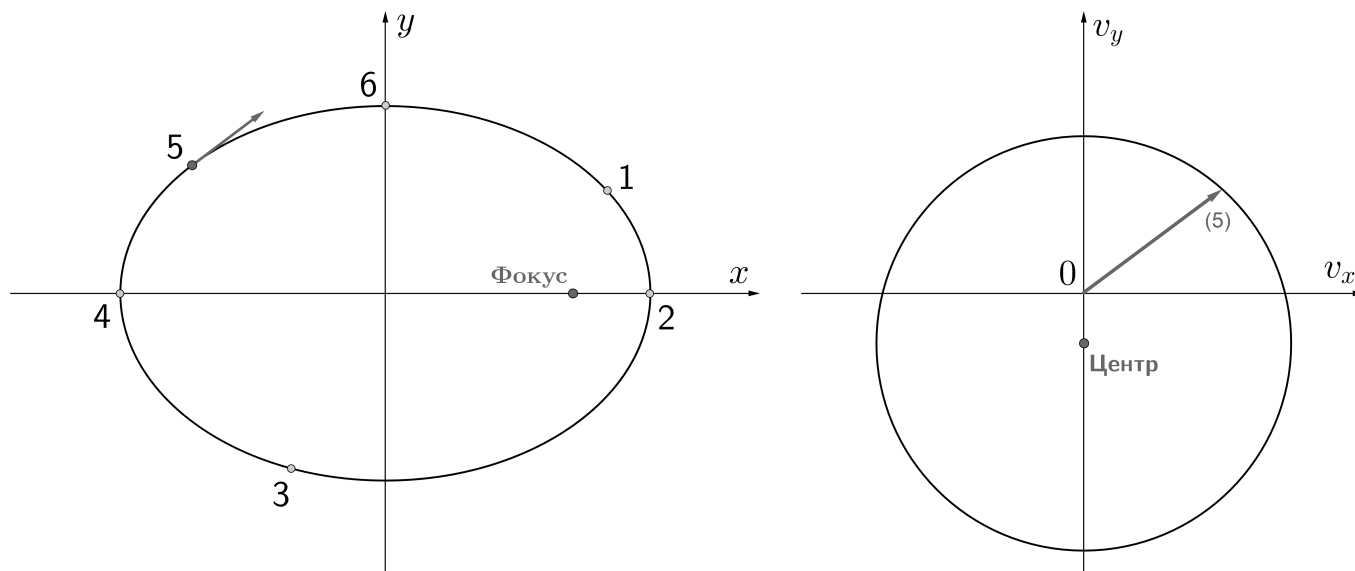


Рис. 3: Вид эллиптической орбиты (а) и *примерного* годографа скорости (b).
Масштабы по осям x и y , v_x и v_y попарно совпадают.

б) Уточните годограф скорости для эллиптической орбиты, изображённой на рис. 3а, с учётом её геометрических параметров.

с) Укажите на годографе точки, соответствующие отмеченным (1–6) на орбите.

д) Изобразите качественно годограф скорости для гиперболической орбиты с эксцентриситетом $e = 2$. Укажите на рисунке характерные элементы и соотношения между ними.

Решение:

а)

$$|d\vec{v}| = \frac{GM}{r^2} dt, \quad |\vec{l}| = r \cdot \frac{r d\varphi}{dt} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| \simeq \boxed{\frac{GM}{|\vec{l}|} \Delta\varphi}$$

б)

$$\begin{cases} 2a = (67 \pm 2) \text{ mm}; \\ 2b = (47 \pm 2) \text{ mm}; \end{cases} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{2a}\right)^2} = 0.71 \pm 0.03;$$

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}}{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}} = \frac{1+e}{1-e} = 5.9 \pm 0.7;$$

$$|v_{y0}| = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{2} = (2.1 \div 2.8) v_{\min}.$$

- с) Вектор скорости направлен по касательной к траектории. Результат построения приведён на рис. 4а.
- д) Реализуется вариант с дугой окружности (рис. 4б). Угол β равен углу между асимптотой и дей-

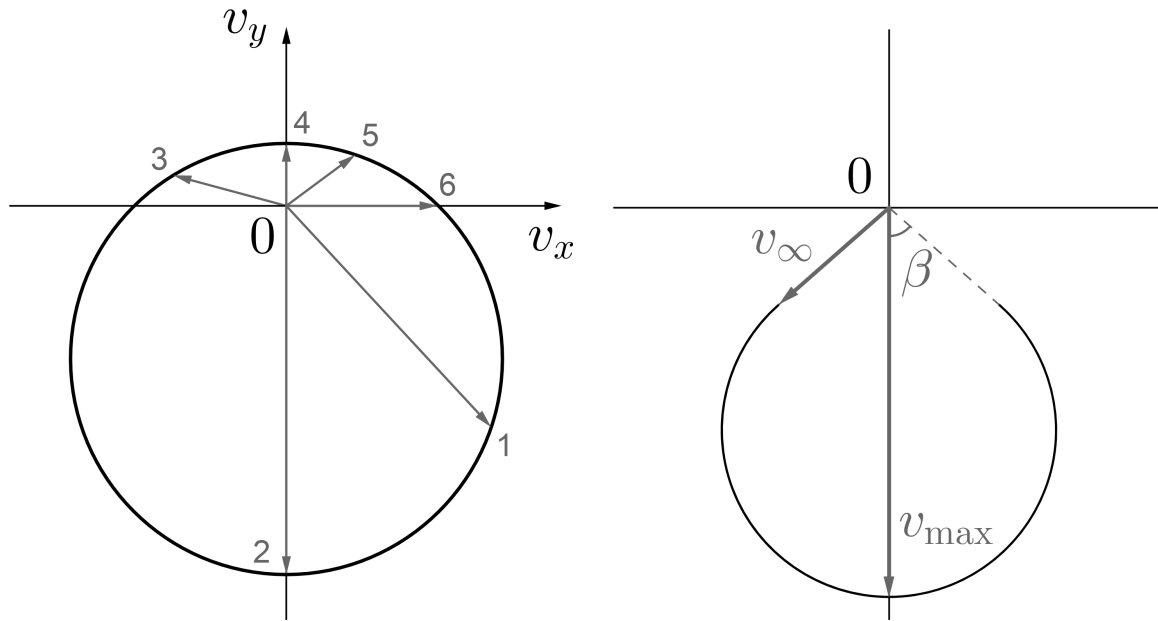


Рис. 4: Ожидаемые годографы скоростей для эллиптической (а) и гиперболической (б) орбит.

ствительной осью гиперболы. Его можно найти, например, используя уравнение гиперболы в полярных координатах:

$$r(\theta) = \frac{k}{1 - e \cos \theta} \Rightarrow \beta = 90^\circ - \theta_{\text{crit}} = \arcsin \frac{1}{e} = 30^\circ.$$

Минимальная скорость удовлетворяет уравнению

$$\frac{v_\infty^2}{2} = -\frac{GM}{2a} \Rightarrow v_\infty = \sqrt{-\frac{GM}{a}},$$

максимальная скорость

$$v_{\max} = \sqrt{-\frac{GM}{a} \frac{e+1}{e-1}} = v_\infty \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \approx 1.73 v_\infty.$$

Указанных параметров достаточно, чтобы однозначно задать годограф.