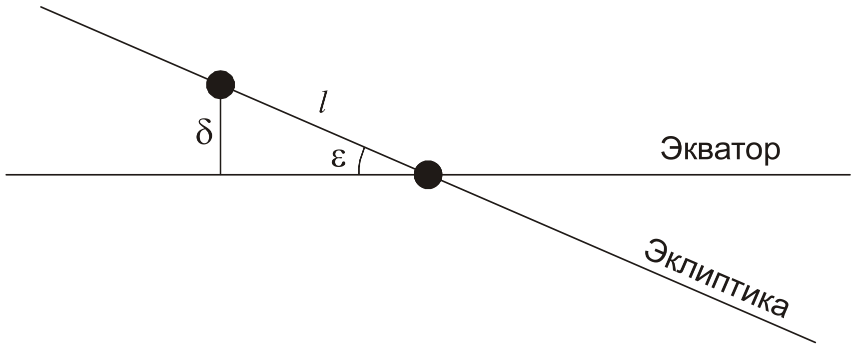
Всероссийская олимпиада школьников по астрономии – 2016

Региональный этап

9 класс

1. Условие. С какой минимальной скоростью нужно перемещаться по поверхности Земли, чтобы ежедневно в течение года, хотя бы раз в сутки, наблюдать центр диска Солнца в зените? Орбиту и форму Земли считать круговой.

1. Решение. За счет годичного движения Земли вокруг Солнца и наклона оси вращения Земли к плоскости эклиптики склонение Солнца постоянно изменяется. Оно равно широте точек на Земле, где Солнце в данный день кульминирует в зените. Скорость изменения склонения Солнца со временем непостоянна. Вблизи солнцестояний склонение практически неизменно, а быстрее всего склонение Солнца меняется в периоды равноденствий, когда Солнце в своем видимом годичном движении пересекает небесный экватор. Рассмотрим для определенности момент весеннего равноденствия и последующие сутки (рисунок):



За сутки Солнце проходит на небесной сфере дугу l (в реальности, Земля проходит такую дугу по орбите). Ее величина, выраженная в радианах, составляет:

$$l = \frac{2\pi t}{T} = 0.0172.$$

Здесь t – длительность солнечных суток (24 часа), а T – продолжительность года. Склонение центра Солнца, равное нулю в момент равноденствия, увеличится за сутки до величины

$$\delta = l \sin\varepsilon = \frac{2\pi t}{T}\sin\varepsilon = 0.00683.$$

Солнце будет кульминировать в зените на экваторе в день равноденствия и на широте δ на следующий день. Чтобы увидеть Солнце в зените оба дня подряд, необходимо преодолеть дугу меридиана, соответствующую углу δ. Длина этой дуги равна $D = R\delta = 43.5$ км (здесь R – радиус Земли). Чтобы преодолеть такое расстояние за солнечные сутки t, необходима скорость

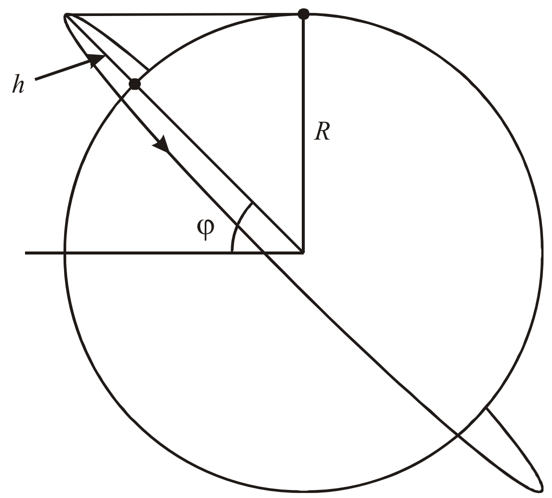
$$v = \frac{D}{t} = \frac{2\pi R}{T}\sin\varepsilon = 1.8\ км/ч.$$

1. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны понимать, за счет чего ежедневно изменяется широта места на поверхности Земли, где центр Солнца может кульминировать в зените. Выбор момента равноденствия, как сезона самого быстрого изменения склонения Солнца, для вычисления требуемой скорости, оценивается в 2 балла, вычисление изменения склонения Солнца за сутки – еще в 2 балла. Если скорость изменения склонения Солнца вычисляется усреднением за более длинный период (например, за полгода), это приводит к уменьшению итогового ответа в полтора раза. В этом случае вместо указанных 4 баллов за первую часть решения задачи выставляется только 2 балла, но оставшаяся часть решения оценивается в полной мере.

Определение пути, который нужно пройти за сутки, оценивается в 2 балла, окончательное вычисление минимальной скорости – еще в 2 балла. При выполнении промежуточных этапов указание численных значений величин не является обязательным, решение можно вести в виде математических формул.

2. Условие. Искусственный спутник Земли запускается с космодрома Восточный (52° с.ш., 128° в.д.). До выхода на расчетную круговую орбиту спутник движется строго вертикально (от центра Земли), а затем ему придается требуемая скорость в восточном направлении. Какой должна быть минимальная высота круговой орбиты искусственного спутника над поверхностью Земли, чтобы с любой точки земной поверхности хотя бы иногда его можно было наблюдать? Рефракцией и атмосферными помехами пренебречь.

2. Решение. По условию задачи, спутник был поднят на некоторую высоту *h* над поверхностью Земли, а потом получил скорость в восточном направлении. Как видно из рисунка, в этом случае точка запуска оказывается самой северной на всей круговой орбите, а наклон этой орбиты к плоскости экватора равен широте космодрома φ.



Сложнее всего спутник будет наблюдать с полюсов Земли. Как видно из рисунка, для того, чтобы он там все же появился хотя бы на горизонте, должно выполняться условие:

$$\sin\varphi = \frac{R}{R+h}.$$

Отсюда

$$h = R\frac{1-\sin\varphi}{\sin\varphi} = 1714 \text{ км}.$$

Очевидно, что орбитальный период спутника (2 часа) будет существенно меньше суток, и в разные моменты времени можно будет наблюдать с любой точки на Земле.

2. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задачи является установление факта, что орбита спутника будет наклонена к плоскости экватора на угол, равной широте космодрома, и точка выхода на орбиту будет самой северной точкой этой орбиты. Данный вывод оценивается в 3 балла. Вычисление минимальной высоты орбиты, при которой спутник будет виден на полюсах, оценивается в 4 балла. Еще 1 балл выставляется за проверку того, что спутник будет вращаться вокруг Земли значительно быстрее, чем сама Земля вокруг своей оси. Это можно сделать, примерно оценив орбитальный период спутника или сравнив радиус орбиты с радиусом геостационарной орбиты.

Если при решении задачи участник олимпиады путает угол φ с углом $90°-\varphi$ (или функции sin и cos в итоговой формуле), то ответ в задаче получается равным 4000 км, и оценка должна быть снижена не менее, чем на 3 балла.

3. Условие. Сколько звездных и солнечных секунд (с точки зрения наблюдателя) проходит за одну физическую секунду в поезде, идущем по одной из самых северных железных дорог мира Дудинка-Норильск (широта +69.5°) в восточном направлении со скоростью 60 км/ч? Уравнением времени пренебречь.

3. Решение. Для неподвижного (относительно поверхности Земли) наблюдателя звездное небо будет вращаться вокруг оси мира с угловой скоростью

$$\Omega_S = \frac{2\pi}{T_S},$$

где T_S – период осевого вращения Земли или продолжительность звездных суток для неподвижного наблюдателя (23 часа 56 минут и 4 секунды). За счет орбитального движения Земли вокруг Солнца солнечные сутки T_0 будут несколько длиннее – ровно 24 часа. Соответствующая угловая скорость видимого суточного движения Солнца (без учета уравнения времени) равна

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{T_S} - \frac{2\pi}{T}.$$

Здесь T – продолжительность года. При движении поезда на восток (в ту же сторону, что и Земля вокруг своей оси) наблюдатель получает дополнительную угловую скорость, равную линейной скорости v, деленной на радиус окружности вокруг оси Земли, по которой происходит движение:

$$\omega = \frac{v}{R\cos\varphi}.$$

Здесь R – радиус Земли, φ – широта места наблюдения. Видимые угловые перемещения звезд и Солнца в ходе суточного движения при наблюдении с поезда увеличатся на эту величину:

$$\Omega'_S = \Omega_S + \omega;$$
$$\Omega'_0 = \Omega_0 + \omega.$$

Одна секунда в той или иной шкале – это время, за которое объект в ходе суточного вращения повернется на угол θ, равной одной временной секунде (или 15″). Физическая секунда t_0 – это секунда в шкале солнечного времени для неподвижного наблюдателя (уравнением времени мы пренебрегаем):

$$t_0 = \frac{\theta}{\Omega_0}.$$

Длительность звездной и солнечной секунды для наблюдателя на поезде составят:

$$t'_S = \frac{\theta}{\Omega'_S}; \quad t'_0 = \frac{\theta}{\Omega'_0}.$$

Выразим одну физическую секунду в полученных выше единицах:

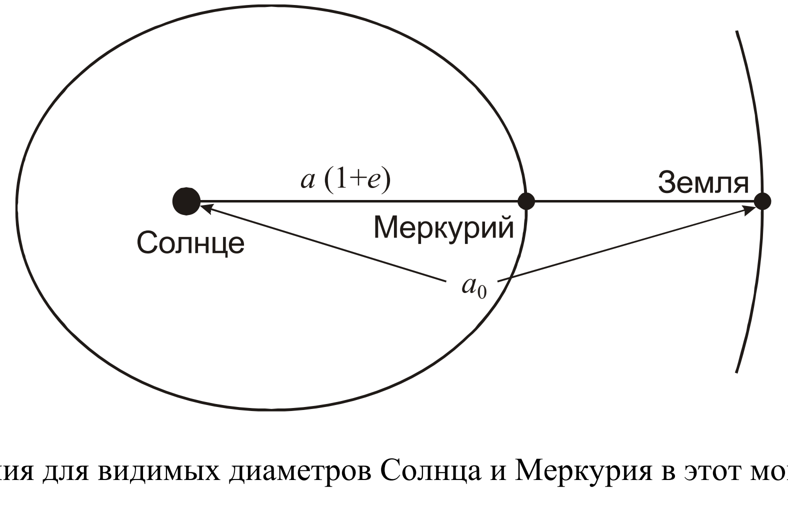
$$\frac{t_0}{t'_S} = \frac{\Omega'_S}{\Omega_0} = \frac{T_0}{T_S}\left(1 + \frac{vT_S}{2\pi R\cos\varphi}\right) = 1.105;$$
$$\frac{t_0}{t'_0} = \frac{\Omega'_0}{\Omega_0} = 1 + \frac{vT_0}{2\pi R\cos\varphi} = 1.103.$$

Итак, за одну физическую секунду наблюдатель этого поезда зафиксирует 1.105 звездных и 1.103 солнечных секунды.

3. Рекомендации для жюри. Данную задачу можно решать, сравнивая угловые скорости (или углового перемещения за секунду) видимого суточного движения Солнца и звезд для неподвижного наблюдателя и пассажира поезда или, напротив, сравнивая периоды обращения Солнца и звезд (солнечные и звездные сутки) для двух наблюдателей, оба подхода считаются в равной степени верными. Вычисление соотношения между длительностью звездных и солнечных суток для неподвижного наблюдателя (или соответствующих угловых скоростей) оценивается в 2 балла. Правильный учет движения поезда и вывод соотношений для длительности суток (угловых скоростей) для наблюдателя на поезде оценивается в 2 балла. Наконец, вычисление длительности обычной секунды в звездной и солнечной шкале для наблюдателя на поезде оцениваются еще по 2 балла.

4. Условие. Вечером 9 мая 2016 года состоится редкое астрономическое явление – прохождение Меркурия по диску Солнца, которое будет хорошо видно в Европейской части России. Для его наблюдения телескоп оснастили солнечным экраном, на котором изображение Солнца имеет диаметр 15 см. Какого диаметра на этом экране будет пятно – изображение Меркурия? Считать, что во время явления Меркурий будет располагаться в афелии своей орбиты, а орбита Земли круговая.

Решение. Прохождение Меркурия по диску Солнца наступает в нижнем соединении планеты (см. рисунок):



Запишем выражения для видимых диаметров Солнца и Меркурия в этот момент:

$$\delta_0 = \frac{D}{a_0}; \quad \delta = \frac{d}{a_0 - a\,(1+e)}.$$

Здесь D и d – пространственные диаметры Солнца и Меркурия, a и a_0 – большие полуоси орбит Меркурия и Земли, e – эксцентриситет орбиты Меркурия. Подставляя численные данные и переводя в градусную меру, получаем значения диаметров: 32′ для Солнца и 12.6″ для Меркурия. Соотношение диаметров изображений объектов на экране будет таким же:

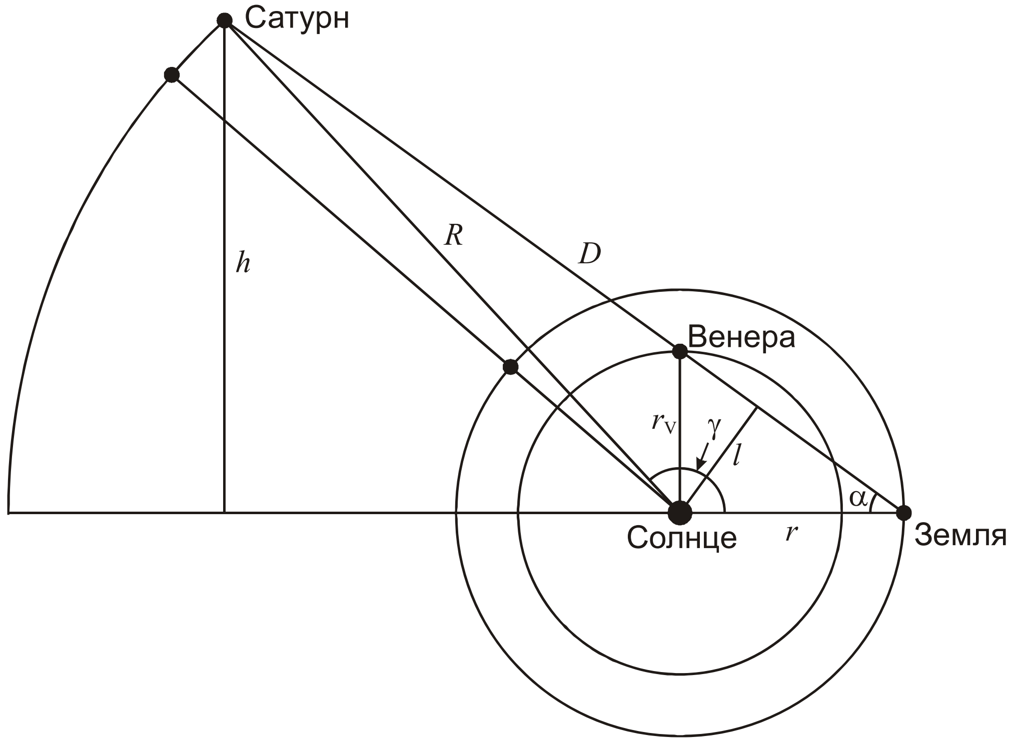
$$\frac{l}{l_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \approx \frac{1}{150}.$$

Меркурий на экране будет выглядеть как пятнышко диаметром 1 мм.

4. Рекомендации для жюри. Для решения задачи достаточно определить соотношение видимых диаметров Солнца и Меркурия в момент нижнего соединения планеты. Данный этап оценивается в 6 баллов. Если при этом не учитывается или неправильно учитывается эксцентриситет орбиты Меркурия, из этих 6 баллов выставляется 4 балла. Если расстояния до Солнца и Меркурия вообще не учитываются, и отношение видимых диаметров считается равным отношению физических диаметров Меркурия и Солнца, то из 6 баллов выставляется только 2 балла. Во всех этих случаях оставшаяся часть решения при условии правильности оценивается в полной мере. Вычисление размера изображения Меркурия на экране оценивается в 2 балла.

5. Условие. 9 января 2016 года Венера, обгоняя Землю в своем орбитальном движении ровно на 90 градусов, вступила в небе Земли в тесное соединение с Сатурном. Определите, в какой день 2016 года Сатурн при наблюдении с Земли вступит в противостояние с Солнцем. Орбиты всех планет считать круговыми.

5. Решение. Изобразим положение трех планет в момент соединения Венеры и Сатурна в небе Земли:



Венера обгоняет Землю в своем орбитальном движении на 90°. Обратим внимание, что Венера не находится в наибольшей элонгации (она произошла в октябре 2015 года). Угловое расстояние Венеры (и Сатурна) от Солнца в небе Земли 9 января равно:

$$\alpha = \arctan \frac{r_V}{r} = 35.9^\circ.$$

Здесь r и r_V – радиусы орбит Земли и Венеры. Для дальнейшего решения задачи нам необходимо найти расстояние от Земли до Сатурна D в этот момент. Это можно сделать с помощью теоремы косинусов, можно упростить вычисления, проведя перпендикуляр от Солнца на линию "Земля-Сатурн", обозначив его l. Искомое расстояние составит

$$D = \sqrt{r^2 - l^2} + \sqrt{R^2 - l^2} = r\cos\alpha + \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\alpha} \approx r\cos\alpha + R.$$

Здесь R – радиус орбиты Сатурна. В последнем равенстве мы учли, что величина $r^2\sin^2\alpha$ составляет менее 0.01 от R^2. Расстояние до Сатурна получается равным 10.34 а.е. (если не делать упрощения, оно получится практически таким же – 10.33 а.е.). Найдем далее разность гелиоцентрических долгот Сатурна и Земли γ. Это можно сделать с помощью теоремы синусов, а можно вновь воспользоваться геометрическим приемом, проведя перпендикуляр от Сатурна к продолжению линии "Земля-Солнце" и обозначив его длину как h. Учитывая, что угол γ больше 90°, запишем выражение для него:

$$\gamma = 180^\circ - \arcsin\frac{h}{R} = 180^\circ - \arcsin\frac{D\sin\alpha}{R} = 180^\circ - \arcsin\left(\sin\alpha + \frac{r}{R}\cos\alpha\,\sin\alpha\right) = 140.6^\circ.$$

В настоящий момент Земля отстает от Сатурна в своем движении на этот угол. Учитывая, что Земля обгоняет Сатурн на целый оборот за синодический период Сатурна S, с учетом предположения о круговых орбитах можно определить, через сколько времени Земля догонит Сатурн в орбитальном движении:

$$T = S\frac{\gamma}{360^\circ} = 148 \text{ сут}.$$

Получаем, что ближайшее противостояние Сатурна наступит 5 июня. Несмотря на ряд упрощений (круговые орбиты, приближенные вычисления), мы получили ответ, очень близкий к истинному – реальное противостояние Сатурна состоится 3 июня 2016 г.

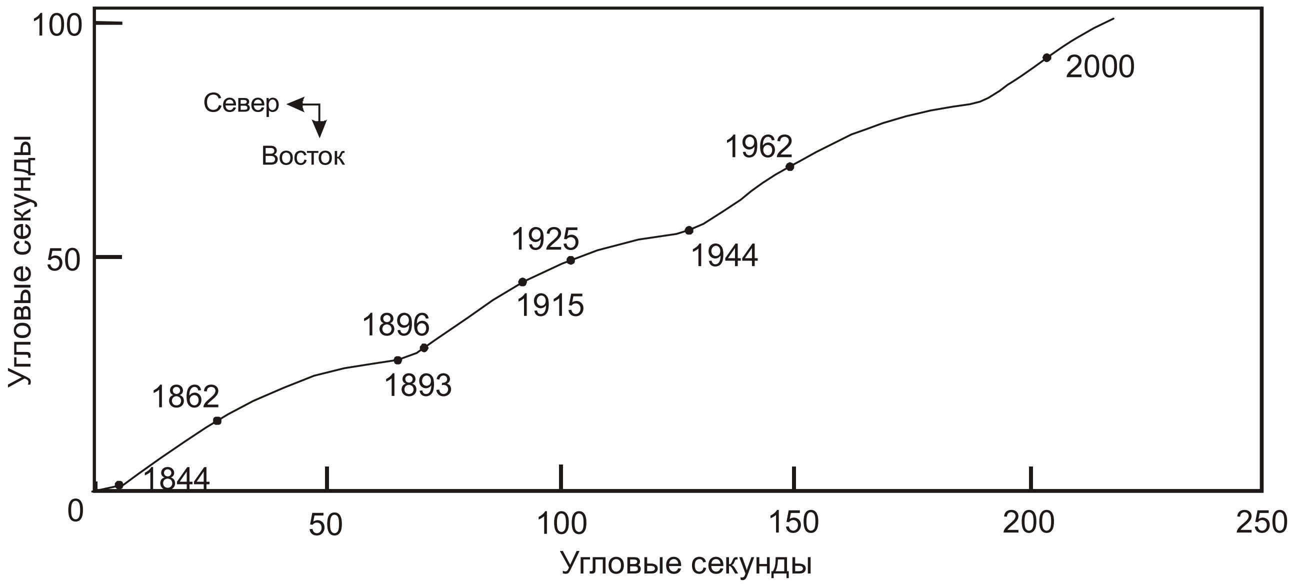
Задачу можно решить приближенно, считая Сатурн очень далекой неподвижной планетой. В этом случае угол γ есть просто $180°-\alpha=144.1°$, а синодический период Сатурна S равен земному году. Тогда мы получаем, что противостояние произойдет через 146 дней, то есть ровно 3 июня, то есть в итоге мы имеем даже более точный ответ. Причина этого в том, что в соответствии с условием задачи, не был учтен эксцентриситет орбиты Сатурна и то, что в 2016 году его расстояние от Солнца существенно больше среднего (10.01 а.е.), что также слегка смещает итоговую дату противостояния.

5. Рекомендации для жюри. Основным этапом решения является определение разности гелиоцентрических долгот Сатурна и Земли в момент, описанный в задаче. Участники олимпиады могут искать ее в точности (хотя это и не является необходимым), могут использовать приближенные вычисления, как описано выше, могут даже использовать графический метод, который оценивается полностью при условии точности вычислений. Весь этот этап решения оценивается в 6 баллов. При использовании схемы, описанной выше, 2 балла выставляется за определение углового расстояния между Солнцем и двумя планетами в небе Земли, 2 балла за определение расстояния до Сатурна (точно или приближенно), 2 балла – за определение угла γ.

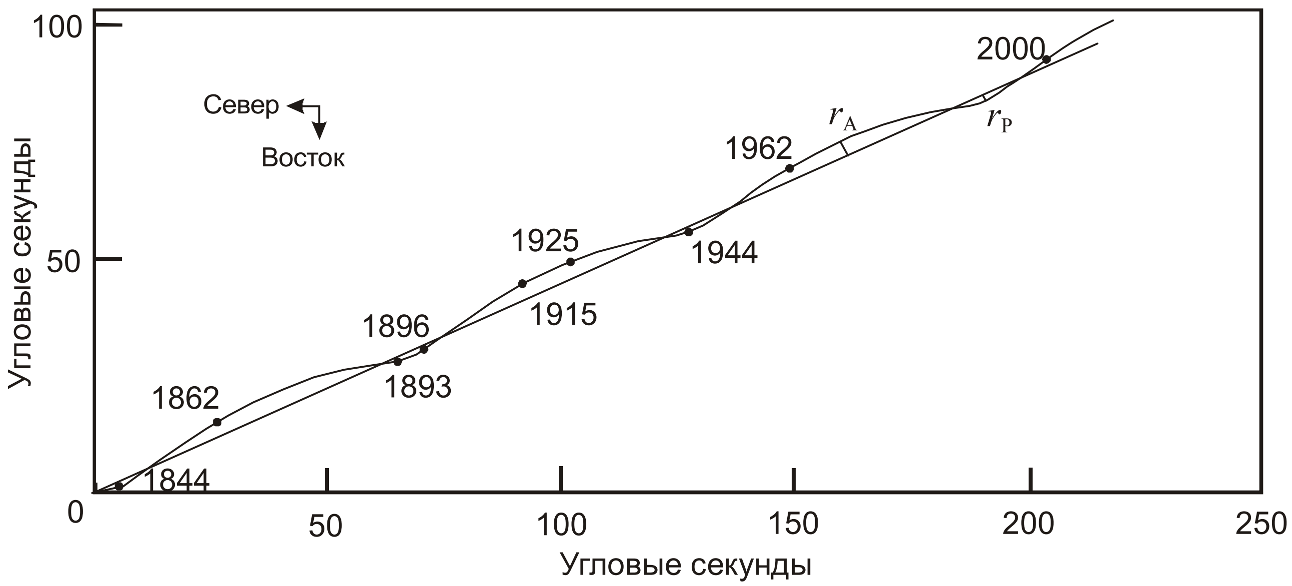
Окончательный этап решения – вычисление даты противостояния Сатурна – оценивается в 2 балла. При этом допускается ошибка в 1-2 дня. Если участник олимпиады записывает дату противостояния, не приводя решения задачи, ему выставляется 2 балла.

Если решение задачи делается приближенно, и Сатурн считается бесконечно удаленной планетой, то при условии правильности вычислений такое решение оценивается 7 баллами (5 баллов за вычисление угла γ и 2 балла за расчет даты противостояния).

6. Условие. На рисунке показано перемещение ярчайшей звезды ночного неба Сириус среди далеких звезд с момента начала наблюдений (годовые параллактические колебания вычтены). На рисунке заметен эффект наличия спутника этой звезды. Оцените массу этого спутника, считая ее существенно меньшей массы самого Сириуса, а орбиту – лежащей в плоскости рисунка. Масса Сириуса равна 2 массам Солнца, расстояние до него – 2.64 пк.



6. Решение. Расстояние до Сириуса равно 2.64 пк, это означает, что одна угловая секунда в плоскости рисунка соответствует расстоянию 2.64 а.е. Траектория Сириуса отличается от прямой линии из-за его вращения вокруг центра масс двойной системы. Период этого вращения *T*, как видно из рисунка, чуть больше 50 лет (мы вполне можем использовать это значение). По условию задачи, мы предполагаем, что вращение происходит в плоскости рисунка. Оно происходит по эллипсу. Для еще большего упрощения предположим, что линия апсид этого эллипса (линия, соединяющая точки перицентра и апоцентра) перпендикулярна собственному движению Сириуса (это близко к истине, в чем можно убедиться по примерно постоянной скорости движения звезды по своей траектории).



Проведем на рисунке прямую линию, соответствующую движению центра масс двойной системы и отметим перицентрическое (r_P) и апоцентрическое (r_A) расстояния Сириуса. Так как нас в дальнейшем будет интересовать только сумма этих величин, высокая точность проведения прямой не требуется (можно вообще провести две касательных к кривой и сразу искать суммарный отрезок). Большая полуось орбиты Сириуса $A = (r_P + r_A)/2$ составляет примерно 2.5″, что соответствует 6.5 а.е. на расстоянии Сириуса. Среднее расстояние между компонентами системы равно

$$a_0 = a + A = \frac{A(M+m)}{m},$$

где M и m – массы Сириуса и его спутника, a – большая полуось орбиты спутника. Здесь мы учли, что из определения центра масс $AM = am$. Из III закона Кеплера имеем:

$$\frac{G(M+m)T^2}{4\pi^2} = a_0^3 = A^3\,\frac{(M+m)^3}{m^3}.$$

Масса спутника Сириуса составляет

$$m = \left(\frac{4\pi^2(M+m)^2A^3}{GT^2}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{4\pi^2M^2A^3}{GT^2}\right)^{1/3}.$$

Здесь мы учитываем то, что масса спутника, по условию задачи, существенно меньше массы Сириуса. Масса спутника получается равной $1.5\cdot10^{30}$ кг или 3/4 массы Солнца, что оправдывает это предположение. Реальная масса Сириуса В немного больше, она равна одной массе Солнца. Разница определяется, в основном, предположением о совпадении плоскости орбиты и плоскости рисунка и перпендикулярностью линии апсид и скорости движения центра масс.

6. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задачи является определение большой полуоси орбиты Сириуса по рисунку, при этом возможны значительные (до 20-30%) отклонения от приведенного выше значения. Вычисление этой величины в угловых секундах оценивается в 2 балла, еще 1 балл выставляется за ее перевод в пространственное расстояние (это возможно делать напрямую, что оценивается теми же 3 баллами). Участники олимпиады могут использовать упрощенный метод, предполагая, что линия апсид перпендикулярна траектории движения центра масс, а могут идти более сложным путем, что (при условии правильности вычислений) не должно сказываться на оценке.

Определение орбитального периода Сириуса оценивается в 1 балл. Запись III закона Кеплера и вывод выражения для массы спутника оценивается в 2 балла. Наконец, последние 2 балла выставляются за вычисление массы спутника Сириуса.

Если правильное значение массы спутника Сириуса дается без обоснований (например, по памяти участника), то итоговая оценка не может быть более 2 баллов.

10 класс

1. Условие. Астроном проводит визуальные наблюдения в телескоп с увеличением 10 крат. Определите максимально возможную звездную величину самых слабых звезд, которые он может увидеть.

1. Решение. Нас интересует предельно возможная звездная величина, поэтому будем считать, что атмосферные эффекты (размытие, поглощение, фон неба) не сказываются на наблюдениях. Обозначим диаметры объектива и зрачка человеческого глаза как D и d_0. Диаметр выходного пучка света от звезды d будет равен D/Γ, где Γ – увеличение, создаваемое окуляром телескопа. Если диаметр выходного пучка будет не больше, чем d_0 (увеличение не меньше равнозрачкового $\Gamma \geq D/d_0$), то в глаз наблюдателя попадет весь свет, собранный объективом. Обозначив поток энергии от звезды до попадания в телескоп как F_0, запишем выражение для количества энергии, зарегистрированной наблюдателем в единицу времени:

$$J = F_0 \frac{\pi D^2}{4} = F_0 \frac{\pi d_0^2}{4}\left(\frac{D}{d_0}\right)^2 = J_0\left(\frac{D}{d_0}\right)^2, \quad D \leq d_0 \Gamma.$$

Здесь J_0 – количество энергии от звезды, которое за то же время зарегистрирует невооруженный глаз. Если увеличение будет меньше, чем D/d_0, выходной зрачок d будет больше зрачка глаза d_0, и не вся энергия, собранная телескопом, попадет в глаз наблюдателя. Он зарегистрирует ее лишь часть:

$$J = F_0 \frac{\pi D^2}{4}\left(\frac{d_0}{d}\right)^2 = \frac{\pi d_0^2}{4}\left(\frac{D}{d}\right)^2 = J_0 \Gamma^2, \quad D > d_0 \Gamma.$$

Получается, что при фиксированном увеличении Γ для телескопов с малыми диаметрами объектива D количество собранного света будет возрастать пропорционально D^2, пока не достигнет величины $J_0\Gamma^2$. Дальнейший рост диаметра объектива не будет изменять величину J, так как она уже будет описываться второй формулой. В итоге, телескоп поможет различить объекты в Γ^2 раз более слабые, чем человеческий глаз. Предельная звездная величина составит

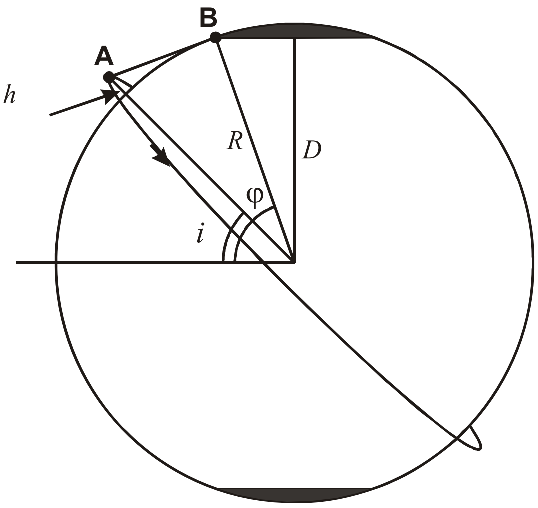
$$m = m_0 + 2.5 \lg \Gamma^2 = m_0 + 5 \lg \Gamma = 11.$$

Здесь m_0 – предельная звездная величина для невооруженного глаза.

1. Рекомендации для жюри. Задачу можно решать несколько разными способами, однако в любом случае нужно показать, что существуют два возможных случая, в одном из которых количество энергии от звезды возрастает до определенного уровня, а в другом – остается на этом уровне. Рассмотрение каждого из случаев оценивается по 3 балла. Окончательный вывод и вычисление предельной звездной величины оценивается в 2 балла. Эти 2 балла выставляются в качестве окончательной оценки, если в решении сразу записывается последняя формула без обоснования. Участники олимпиады могут брать в качестве предельной звездной величины для невооруженного глаза значения от 5^m до 7^m, в противном случае оценка снижается на 1 балл.

2. Условие. С какой части поверхности Земли можно наблюдать Международную космическую станцию, если известно, что высота ее круговой орбиты составляет 420 км, а наклонение 51.6 градуса? Рефракцией, атмосферными помехами и сжатием Земли пренебречь.

2. Решение. Изобразим Землю и орбиту МКС со стороны одного из узлов орбиты МКС (точки ее пересечения с плоскостью экватора):



МКС располагается на низкой круговой орбите, ее период обращения существенно меньше земных суток. Поэтому в разные моменты времени северная, южная и экваториальная часть орбиты будет располагаться над разными областями поверхности Земли. В этом случае на экваторе и в низких широтах с модулем меньше наклона орбиты i МКС будет периодически видна, более того, она может оказываться там в зените. Существенно сложнее ее будет наблюдать в высоких широтах. Определим максимальную широту φ, на которой МКС сможет наблюдаться хотя бы на горизонте. Из рисунка видно, что это можно сделать по следующей формуле:

$$\varphi = i + \arccos\frac{R}{R+h} = 71.9^\circ.$$

Здесь R – радиус Земли, h – высота орбиты МКС. Если бы величина φ получилась большей 90°, это бы означало, что станцию можно наблюдать со всей Земли, включая полюса. Теперь же максимальное расстояние от точки наблюдения до плоскости экватора будет равно

$$D = R\sin\varphi.$$

МКС может наблюдаться на широтах с модулем меньше φ (то есть, кроме зон, покрашенных темным цветом на рисунке). Разделяя площадь соответствующей поверхности на полную площадь поверхности шара, получаем ответ на вопрос задачи:

$$\eta = \frac{4\pi RD}{4\pi R^2} = \frac{D}{R} = \sin\varphi = 0.95.$$

Рекомендации для жюри. При решении задачи участник олимпиады должен отметить, что орбитальный период МКС существенно меньше суток, и разные части орбиты в разное время располагаются над разными областями поверхности планеты. Этот вывод оценивается в 1 балл. Вне зависимости от его наличия, оставшаяся часть решения оценивается в полной мере. Вычисление максимальной широты φ (либо расстояния от плоскости экватора D), на которой может наблюдаться МКС, оценивается в 4 балла. Вычисление соответствующей доли поверхности Земли оценивается в 3 балла. Это можно делать как точно (через площадь части сферы), так и приближенно, считая приполярные области невидимости МКС плоскими кругами, что также оценивается полностью.

3. Условие. 14 июля 2015 года космический аппарат New Horizons прошел рядом с Плутоном, имеющим на тот момент геоцентрические координаты α=19ч00.2м, δ=–20°45′. В какое местное время станция слежения, расположенная на экваторе Земли, могла отправить сигнал на аппарат, чтобы получить ответ? Считать, что аппарат дает ответ мгновенно при получении сигнала. Расстояние от Солнца до Плутона в 2015 году считать равным 33 а.е., атмосферные помехи и уравнение времени не учитывать.

3. Решение. Прохождение аппарата мимо Плутона произошло спустя 21 день после летнего солнцестояния. Поскольку за сутки эклиптическая долгота Солнца меняется примерно на 1°, прямое восхождение Солнца α_0 увеличится примерно на 1.5 часа, т.е. составит 7.5 часов. По координатам мы видим, что Плутон в момент подлета станции был вблизи противостояния с Солнцем, если наблюдать с Земли. Поэтому геоцентрическое расстояние Плутона D было на 1 а.е. меньше гелиоцентрического и составляло 32 а.е.

Станция может отправить сигнал к станции только в тот момент, когда Плутон располагается над горизонтом. Сигнал должен дойти до Плутона, потом то же время потребуется ответному сигналу. В момент приема ответного сигнала станцией Плутон должен вновь находиться над горизонтом. Определим суммарное время, требуемое прямому и ответному сигналу, чтобы преодолеть свой путь:

$$T = \frac{2D}{c} = 32000\ \text{с} \sim 9\ \text{ч}.$$

Это достаточно большое время, но все же меньшее 12 часов – именно столько Плутон проводит над горизонтом и под ним на экваторе (разницей между продолжительностью солнечных и звездных суток мы пренебрегаем). Поэтому отправить сигнал на экваторе перед заходом Плутона, чтобы получить ответный сигнал после восхода, не получится. Единственная возможность – отправить сигнал вскоре после восхода Плутона и получить ответ перед его заходом.

Определим местное время восхода и захода Плутона на экваторе в указанный день. Момент верхней кульминации Плутона в этот день приходится на местное время:

$$T_0 = 12\text{ч} + \alpha - \alpha_0 = 23\text{ч}30\text{м}.$$

Эта планета взойдет на экваторе в 17ч30м и зайдет в 05ч30м. Сигнал нужно отправить после восхода, но не менее чем за 9ч до захода Плутона. Этому условию удовлетворяет интервал от 17ч30м до 20ч30м по местному времени.

3. Рекомендации для жюри. Для решения задачи нужно определить время, которое потребуется сигналу, чтобы достичь Плутона и вернуться обратно на Землю. Выполнение этого этапа оценивается в 3 балла. Если вместо геоцентрического расстояния Плутона берется гелиоцентрическое (33 а.е.), оценка уменьшается на 1 балл, но дальнейшее решение оценивается в полной мере. Далее участники олимпиады должны сделать вывод, что сигнал необходимо отправить вскоре после восхода Плутона, чтобы получить ответ перед его заходом, это оценивается в 2 балла. Вычисление допустимого интервала времени оценивается в 3 балла. При вычислениях достаточна точность, представленная в решении выше. Участники вправе решать задачу более точно, оценка определяется правильностью делаемых вычислений.

4. Условие. Звезда A вдвое горячее, вдвое дальше и выглядит на 2^m ярче, чем звезда B. Найдите соотношение размеров звезд. Межзвездное поглощение не учитывать.

4. Решение. Обозначим потоки световой энергии от звезд A и B на Земле как J_A и J_B, расстояния до этих звезд – как D_A и D_B. Определим соотношение светимостей звезд I_A и I_B:

$$J_{A,B} = \frac{I_{A,B}}{4\pi D_{A,B}^2}; \quad \frac{I_A}{I_B} = \frac{J_A}{J_B}\left(\frac{D_A}{D_B}\right)^2 = 10^{0.4 \cdot 2} \cdot 4 = 25.$$

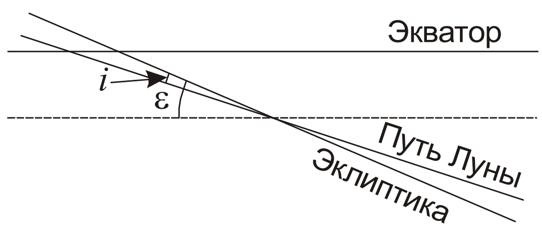
По закону Стефана-Больцмана, светимость звезды пропорциональна ее температуре T в четвертой степени и радиусу R во второй степени. Отсюда мы получаем соотношение радиусов звезд:

$$\frac{R_A}{R_B} = \left(\frac{I_A}{I_B}\right)^{1/2}\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

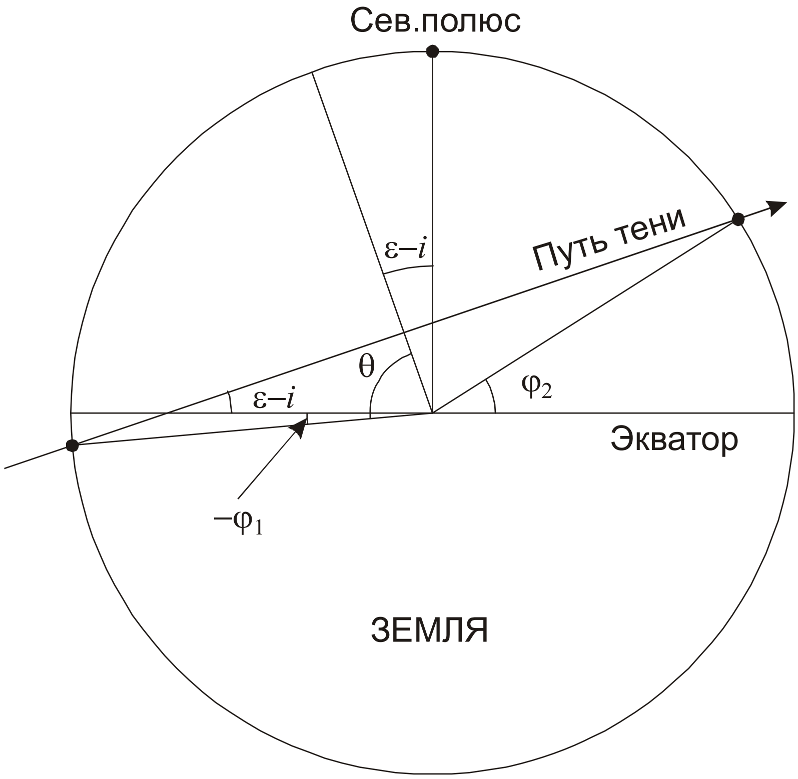
4. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники должны указать два базовых факта (в любой последовательности): видимая яркость звезды пропорциональна ее светимости и обратно пропорциональна расстоянию; светимость пропорциональна температуре в четвертой степени и радиусу во второй степени. Указание (текстовое или математическое) каждого факта оценивается по 3 балла, итоговые вычисления оцениваются в 2 балла.

5. Условие. Ближайшее полное солнечное затмение состоится 9 марта 2016 года. Точка, в которой полное затмение будет видно раньше всего, будет располагаться вблизи экватора (широта –3°). На какой широте будет располагаться последняя точка наблюдения полной фазы затмения? Луна во время затмения будет около нисходящего узла своей орбиты.

5. Решение. Обратим внимание, что затмение происходит вблизи момента весеннего равноденствия. В этот момент линия эклиптики проходит под углом ε (23.4°) к экватору. Сама Луна движется под углом i к эклиптике, причем она находится в нисходящем узле. Поэтому движение Луны будет происходить под углом (ε – i) = 18.25° к экватору. Примерно под таким же углом к плоскости экватора будет двигаться тень Луны на Земле (так как угловое перемещение Земли по орбите вокруг Солнца в плоскости эклиптики происходит со значительно меньшей угловой скоростью).



Рассмотрим Землю со стороны Луны и движение тени Луны по ней. Будем считать, что картина наблюдается прямо в момент равноденствия (это не приведет к существенной ошибке в ответе). Учтем, что проекция второго рисунка зеркальна по отношению к проекции первого рисунка.



Из рисунка мы получаем соотношение для широт точек Земли, в которых начнется и завершится полное затмение:

$$\varphi_1 = 90° - (\varepsilon - i) - \theta;$$
$$\varphi_2 = 90° + (\varepsilon - i) - \theta;$$
$$90° - (\varepsilon - i) - \varphi_1 = 90° + (\varepsilon - i) - \varphi_2;$$
$$\varphi_2 = \varphi_1 + 2\,(\varepsilon - i) = +33.5°.$$

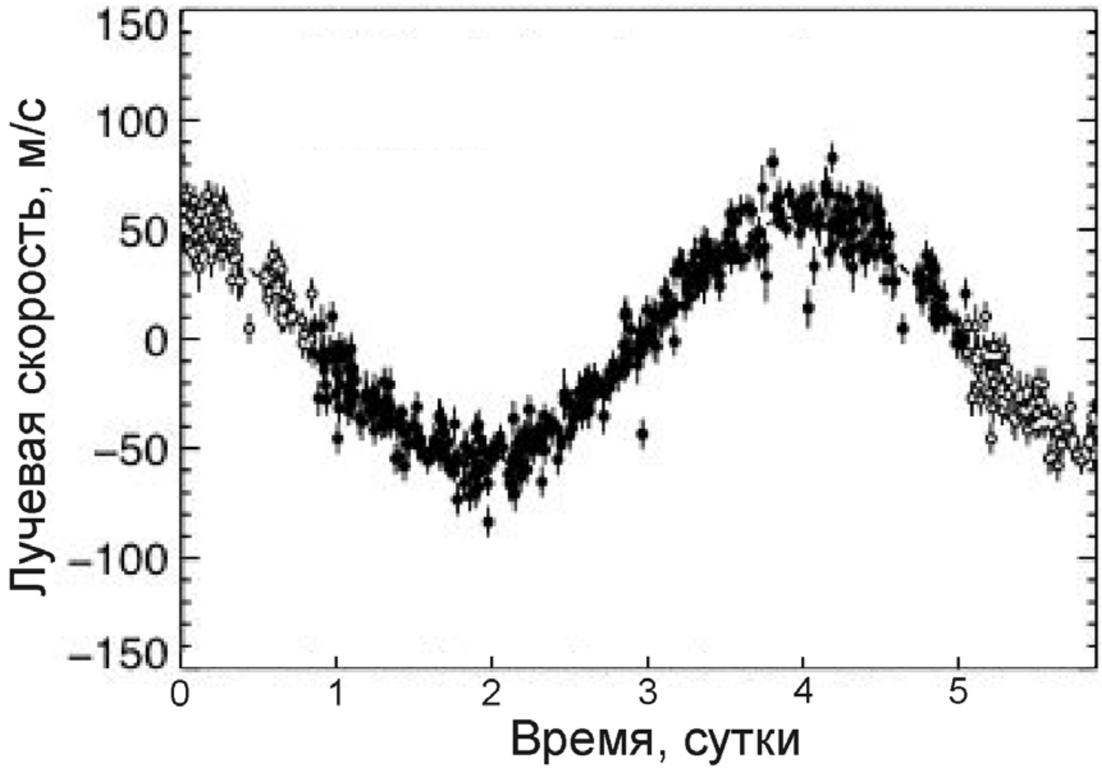
Несмотря на ряд сделанных допущений, мы получили ответ, всего на 0.5° превышающий истинное значение.

Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники должны установить, что движение Луны в день затмения будет происходить под углом ($\varepsilon - i$) к экватору, это оценивается в 3 балла. Если участник олимпиады не учитывает наклон лунной орбиты к эклиптике и вместо угла ($\varepsilon - i$) берет угол ε (с окончательным ответом в задаче +44°), то из этих 3 баллов выставляется только 1, но последующее решение при условии его правильности оценивается в полной мере.

1 балл выставляется за указание либо понимание, что лунная тень будет двигаться под тем же углом (участники могут вычислить этот угол более точно, с учетом движения Земли по орбите, что не влияет на оценку). Построение соотношения между широтами первого и последнего контактов тени Луны с Землей оценивается в 3 балла. При этом можно, но не обязательно, учитывать размеры тени, которые не скажутся на ответе. Наконец, вычисление широты последнего контакта оценивается в 1 балл.

6. Условие. Более 20 лет назад, в 1995 году, была открыта первая экзопланета, обращающаяся вокруг звезды 51 Пегаса. Масса звезды равна массе Солнца. На графике приведена зависимость гелиоцентрической лучевой скорости этой звезды от времени.

Оцените по этому графику массу экзопланеты, считая, что луч зрения лежит в плоскости ее орбиты.



6. Решение. По графику мы можем определить период обращения звезды (и ее планеты) вокруг общего центра масс T, он равен 4.2 суткам. Амплитуда лучевой скорости звезды v составляет 60 м/с. Мы считаем, что луч зрения лежит в плоскости орбит в системе, следовательно, полученная величина совпадает с полной скоростью звезды. Изменения лучевой скорости синусоидальные, поэтому мы можем считать орбиту круговой, а скорости – постоянными. Вычислим радиус орбиты звезды:

$$A = \frac{vT}{2\pi} = 3500 \text{ км.}$$

Обозначим массы звезды и планеты как M и m, радиус орбиты планеты как a. Расстояние между компонентами системы равно

$$a_0 = a + A = \frac{A(M+m)}{m}.$$

Здесь a – большая полуось орбиты планеты. Мы учли, что из определения центра масс $AM = am$. Из III закона Кеплера имеем:

$$\frac{G(M+m)T^2}{4\pi^2} = a_0^3 = A^3\,\frac{(M+m)^3}{m^3}.$$

Масса планеты составляет

$$m = \left(\frac{4\pi^2(M+m)^2A^3}{GT^2}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{4\pi^2M^2A^3}{GT^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{v^2M^2A}{G}\right)^{1/3}.$$

Мы получаем значение $9\cdot10^{26}$ кг или половина массы Юпитера. С учетом возможного наклона орбиты планеты к картинной плоскости (при решении не рассматривалось) масса планеты может быть больше.

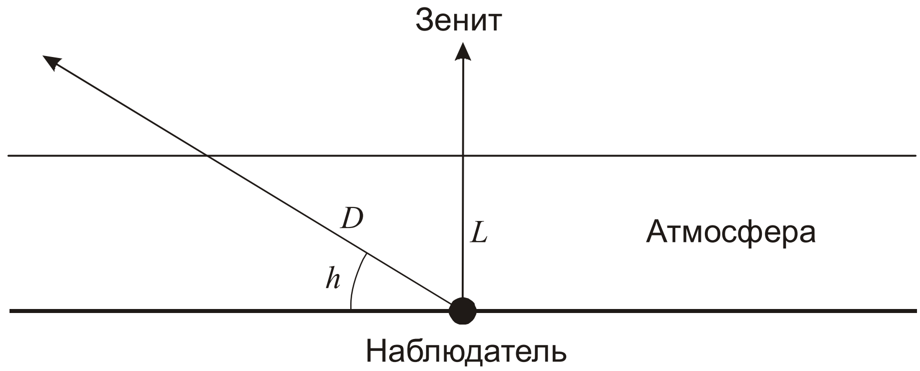
6. Рекомендации для жюри. Первая часть решения задания связана с анализом графика, из которого участники олимпиады должны получить значения орбитального периода (1 балл) и амплитуды лучевой скорости (1 балл), при этом допускаются отклонения от указанных выше величин в пределах 20%. Связь скорости (или радиуса орбиты) звезды, планеты и центра масс оценивается в 2 балла. Правильное применение III закона Кеплера (или формул кругового движения) оценивается еще в 2 балла. Наконец, последние 2 балла выставляются за вычисление массы экзопланеты.

Если правильное значение массы планеты дается без обоснований, то итоговая оценка не может быть более 2 баллов.

11 класс

1. Условие. Звезда имела в зените видимый блеск 0^m, а на высоте 30 градусов стала светить вдвое слабее. Какую звездную величину она будет иметь на высоте 20 градусов над горизонтом? Атмосферные условия считать постоянными и однородными.

1. Решение. При стабильных атмосферных условиях вдали от горизонта для решения данной задачи мы можем считать атмосферу некоторым плоским слоем толщиной L. Поглощение света в ней (увеличение видимой звездной величины светила) будет пропорционально пути луча в ней $D=L/\sin h$, где h – высота светила над горизонтом.



Тогда видимая звездная величина объекта m зависит от его высоты над горизонтом h как

$$m = m_0 + \frac{E_m}{\sin h}.$$

Здесь величина E_m есть ослабление блеска звезды в зените. Нам известно, что в зените ($1/\sin h_1 = 1$) величина m_1 равна 0, а на высоте 30° ($1/\sin h_2 = 2$) звездная величина составляет

$$m_2 = m_1 + 2.5 \lg 2 = 0.75.$$

Отсюда мы получаем: $m_0 = -0.75$, $E_m = 0.75$. Для высоты h_3, равной 20°, имеем:

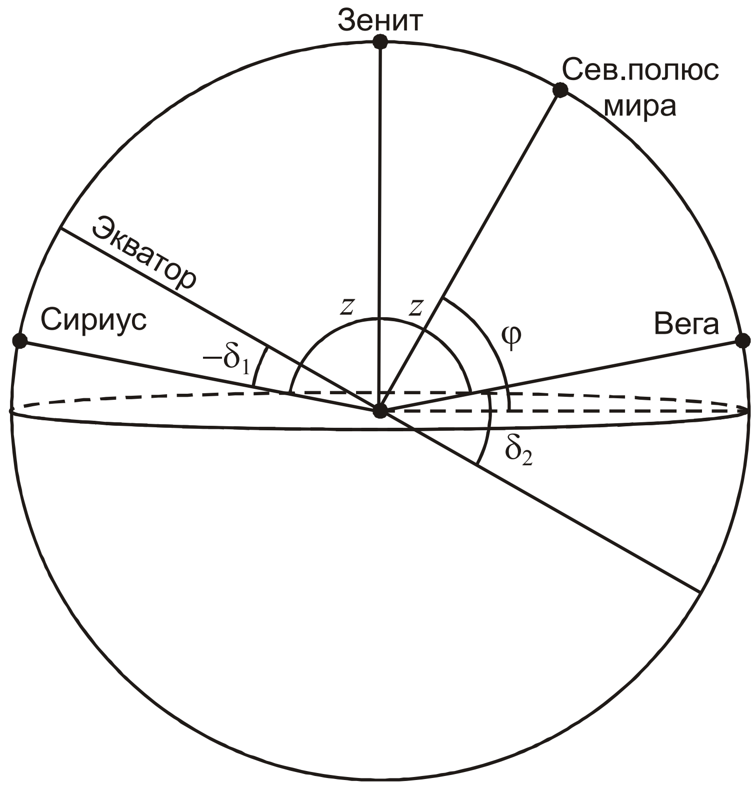
$$m_3 = -0.75 + \frac{0.75}{\sin 20^{\circ}} = 1.4.$$

Указанная ситуация, очевидно, относится к сильно запыленной атмосфере. Если пыль располагается в самых нижних слоях (а это обычно так), то записанная простая модель закона Бугера для плоской атмосферы работает до еще меньших высот над горизонтом, и ее использование в данном случае вполне оправдано.

1. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны воспользоваться законом изменения звездной величины звезды в зависимости от ее высоты над горизонтом (или зенитного расстояния) – законом Бугера. Он может быть записан по-разному (звездные величины, логарифмы яркости, сама яркость в экспоненциальном виде), что является в равной степени правильным и оценивается в 3 балла. Восстановление параметров закона Бугера (звездная величина или яркость в зените или за атмосферой, параметр E_{m} или его аналог) оценивается еще в 3 балла. Наконец, вычисление звездной величины на высоте 20° оценивается еще в 2 балла.

2. Условие. Две яркие звезды – Сириус (α=06ч45.1м, δ=–16°43′) и Вега (α=18ч36.9м, δ=+38°47′) – располагаются на одинаковой высоте над горизонтом. На какой широте на Земле (с точностью до градуса) эта высота будет наибольшей?

2. Решение. Сириус и Вега находятся на небе далеко друг от друга, но не в противоположных точках небесной сферы. Через них можно провести ровно один большой круг небесной сферы. Звезды располагаются на одной высоте над горизонтом на этом круге. Эта высота будет наибольшей, если данный круг располагается вертикально, проходя через зенит (см. рисунок):



Угловое расстояние между Сириусом и Вегой, как видно по координатам, составляет примерно 160°, и звезды будут видны примерно на 10° над горизонтом. Разность прямых восхождений Сириуса и Веги существенно меньше, и мы можем считать их одинаковыми.

Тогда большой круг, содержащий две звезды и зенит, пройдет также через полюса мира и совпадет с небесным меридианом. Обозначим зенитные расстояния звезд как z. Для северного полушария Земли (рисунок) и южного полушария мы можем записать:

Северное полушарие:

$$z + \delta_2 = 180° - \varphi; \;\; z + \delta_1 = \varphi;$$
$$z + \delta_1 + z + \delta_2 = 180°.$$

Южное полушарие:

$$z - \delta_2 = 180° - \varphi; \;\; z - \delta_1 = \varphi;$$
$$z - \delta_1 + z - \delta_2 = 180°.$$

Отсюда мы получаем величины зенитных расстояний: 79° для северного полушария и 101° для южного полушария. По условию задачи, звезды располагаются над горизонтом, и мы выбираем случай северного полушария. Очевидно, Сириус располагается в верхней кульминации, Вега – в нижней кульминации. Широта места наблюдения составляет

$$\varphi = \delta_1 + z = 180° - \delta_2 - z = +62°.$$

Этот ответ очень близок к точному, который можно было бы получить, не предполагая противоположность прямых восхождений звезд (+61.9°).

2. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники должны указать, в каком случае одинаковая высота Сириуса и Веги над горизонтом будет наибольшей: большой круг, проведенный через эти звезды, должен пройти также через зенит. Этот вывод, сделанный словами или графически, оценивается в 2 балла. Далее участники могут строить метод точного вычисления широты (через формулы сферической тригонометрии или векторный анализ), что должно быть засчитано полностью (6 баллов) при условии правильного выполнения. При использовании приближенного метода, описанного выше, участники должны записать условие равных высот для северного полушария (2 балла), ту же формулу для южного полушария либо обоснование, почему этот случай не нужно рассматривать (2 балла), и, наконец, определить значение широты (2 балла). Задачу можно также решить, найдя середину дуги большого круга небесной сферы, соединяющей Вегу и Сириус, и приравнять склонение этой точки широте места.

Если участники олимпиады сразу и без обоснований указывают, что Сириус находится в верхней кульминации, а Вега в нижней кульминации, то итоговая оценка в случае правильного ответа не может превышать 4 баллов.

3. Условие. Задолго до подлета межпланетной станции к Нептуну со стороны Солнца диск его спутника Тритон различим с борта станции в некоторый телескоп, причем выглядит таким же (по видимым размерам и яркости), как сам Нептун без телескопа. Найдите диаметр объектива телескопа и его увеличение. Геометрическое альбедо Нептуна и Тритона равно 0.41 и 0.76 соответственно.

3. Решение. По условию задачи, станция подлетает к Нептуну со стороны Солнца, поэтому планета и все ее спутники, видимые в тот или иной момент, будут иметь полную фазу, то есть выглядеть как круглые диски. Для углового диаметра δ и яркости объекта j (или плотности потока энергии от него) в этом случае справедливы соотношения:

$$\delta = \frac{\Delta}{L}; \quad j = I\,\frac{A\pi\Delta^2}{4\pi L^2} = I\,\frac{A\Delta^2}{4L^2}.$$

Здесь I – поток солнечного излучения вблизи объекта, L – расстояние до него, Δ и A – диаметр и геометрическое альбедо объекта. Отметим, что в случае использования сферического альбедо в предположении одинакового отражения света во все стороны, в знаменателе появился бы еще множитель 4. Это не меняло бы дальнейшее решение задачи, так как это в равной степени относилось бы к Нептуну и Тритону.

По условию задачи, космический аппарат находится еще достаточно далеко от системы "Нептун-Тритон", поэтому расстояния до Нептуна и Тритона можно считать одинаковыми. Также одинакова для них величина I. При использовании телескопа с диаметром объектива D и увеличением Γ видимый диаметр объекта будет равен

$$\delta' = \delta \cdot \Gamma.$$

Видимая яркость объекта зависит от параметров телескопа, который при этом используется. Если увеличение телескопа Γ больше отношения диаметров телескопа (D) и зрачка глаза (d), то вся собранная объективом световая энергия попадет в глаз наблюдателя:

$$j' = j\frac{D^2}{d^2}, \quad \Gamma \geq \frac{D}{d};$$

Вспомним, что величина j соответствует наблюдениям невооруженным глазом. Если же увеличение меньше, то в глаз попадет лишь энергия, собранная центральной частью объектива диаметром $d \cdot \Gamma$. Тогда

$$j' = j\Gamma^2, \quad \Gamma < \frac{D}{d}.$$

По условию задачи, Тритон (индекс 2) выглядит в телескоп таким же, как Нептун (индекс 1) без телескопа, то есть

$$\delta'_2 = \delta_1, \quad j'_2 = j_1.$$

Тогда равенства видимых диаметров мы имеем:

$$\frac{\delta'_2}{\delta_1} = 1 = \frac{\Gamma\delta_2}{\delta_1} = \frac{\Gamma\Delta_2}{\Delta_1}; \quad \Gamma = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = 18.$$

Из равенства видимой яркости:

$$\frac{j'_2}{j_1} = 1 = \frac{j_2}{j_1}\frac{D^2}{d^2} = \frac{A_2}{A_1}\cdot\frac{D^2}{d^2}\cdot\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} = \frac{A_2}{A_1}\cdot\frac{D^2}{d^2}\cdot\frac{1}{\Gamma^2}, \quad \Gamma \geq \frac{D}{d};$$

$$\frac{j'_2}{j_1} = 1 = \frac{j_2}{j_1}\Gamma^2 = \frac{A_2}{A_1}\cdot\Gamma^2\cdot\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} = \frac{A_2}{A_1}\cdot\Gamma^2\cdot\frac{1}{\Gamma^2} = \frac{A_2}{A_1}, \quad \Gamma < \frac{D}{d}.$$

Во втором случае мы пришли к противоречию, так как геометрическое альбедо у Нептуна и Тритона разное, их отношение не равно единице. Для первого случая имеем:

$$D = d\Gamma\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = d\,\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} = d\cdot 13.5 = 8 \text{ см}.$$

Диаметр зрачка глаза принят равным 6 мм (необходимо удостовериться, что выполняется соотношение $\Gamma \geq D/d$). Обратим внимание, что решение задачи существует только при $A_2 \geq A_1$ (геометрическое альбедо у спутника не меньше, чем у планеты).

3. Рекомендации для жюри. Задачу можно решать, сравнивая видимые диаметры и яркость либо же видимые диаметры и поверхностную яркость Нептуна для невооруженного глаза и Тритона в телескоп, что одинаково верно. При этом можно не выписывать выражения для полной и поверхностной яркости, а сразу переходить к их соотношению. Если же данные выражения в записаны в абсолютном виде, то в знаменателе участники могут записывать также дополнительные коэффициенты 2 или 4, фактически путая геометрическое альбедо со сферическим. Это не влияет на дальнейшие вычисления (так как коэффициенты сокращаются при сравнении яркостей) и не может служить основанием для снижения оценки. Вместо альбедо участники олимпиады могут использовать звездные величины Нептуна и Тритона с Земли в противостоянии, указанные в справочных данных, что при правильном решении с учетом разных размеров двух тел приводит к тому же ответу.

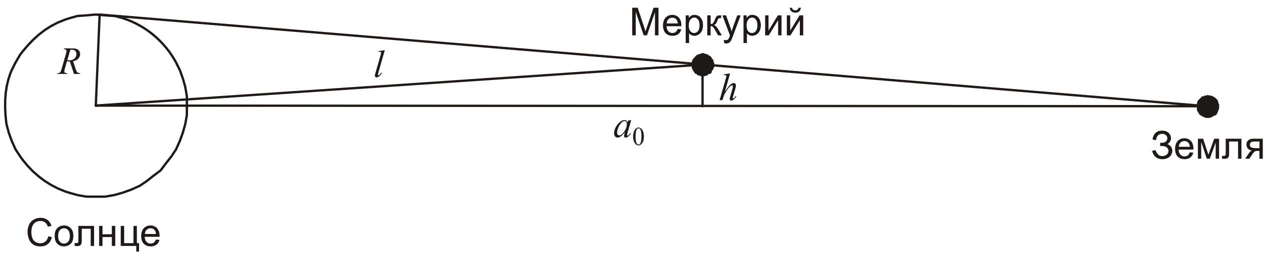
Правильная запись соотношения видимых диаметров Нептуна (глазом) и Тритона (в телескоп) оценивается в 1 балл, верное вычисление увеличения оценивается еще в 1 балл. Запись соотношения полных или поверхностных яркостей объекта оценивается по 2 балла за каждый из возможных случаев. Выбор правильного случая оценивается в 1 балл, и еще 1 балл выставляется за определение диаметра объектива телескопа. При этом допускаются отклонения от полученной выше величины, если они вызваны взятием другого размера зрачка глаза вплоть до 10 мм (в этом случае диаметр объектива возрастает до 13.5 см).

Если второй случай (увеличение телескопа меньше равнозрачкового) не рассматривается, то итоговая оценка за решение не может быть выше 6 баллов.

4. Условие. Вечером 9 мая 2016 года состоится редкое астрономическое явление – прохождение Меркурия по диску Солнца, которое будет хорошо видно в Европейской части России. Определите, во сколько раз майские прохождения Меркурия случаются реже ноябрьских. Считайте, что во время майских прохождений Меркурий располагается в афелии своей орбиты, а орбита Земли круговая.

4. Решение. Для того, чтобы произошло прохождение Меркурия по диску Солнца, должны выполниться два условия: Меркурий должен находиться в нижнем соединении с Солнцем (то есть находиться между Солнцем и Землей) и быть в это же время вблизи одного из узлов своей орбиты – точек ее пересечения с плоскостью орбиты Земли (плоскости эклиптики). Если во время нижнего соединения второе условие не выполняется, Меркурий пройдет на небе Земли севернее или южнее Солнца, и прохождение не наступит. Поэтому эти явления происходят только в два противоположных сезона года – в начале мая и начале ноября. Их частота определяется тем, насколько близко к узлу орбиты должен находиться Меркурий.

Пусть в момент нижнего соединения Меркурий располагается на расстоянии l от Солнца. Определим его максимальное расстояние от плоскости орбиты Земли, при котором может наступить прохождение по диску Солнца (см. рисунок):



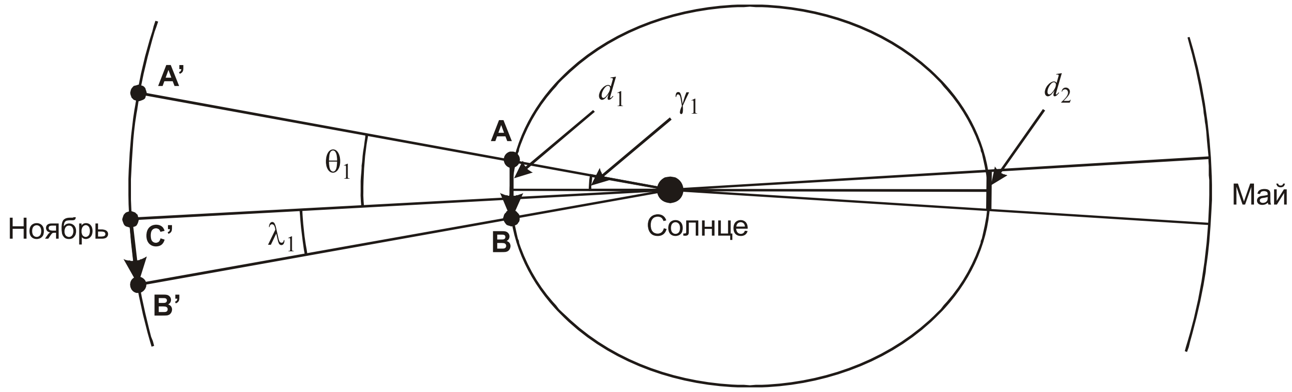
$$h = R\frac{a_0 - l}{a_0}.$$

Здесь R – радиус Солнца, a_0 – радиус орбиты Земли. Орбита Меркурия наклонена на угол i к плоскости эклиптики (причем этот угол невелик), поэтому мы можем сразу определить максимальное линейное расстояние Меркурия от узла орбиты, выразив угол i в радианах:

$$d = \frac{h}{i} = R\frac{a_0 - l}{a_0 i}.$$

Для ноябрьских прохождений в перигелии (далее – индекс "1") и майских прохождений в афелии (далее – индекс "2") эта величина будет отличаться. Обозначив большую полуось и эксцентриситет орбиты Меркурия как a и e соответственно, запишем:

$$l_1 = a(1-e);\ l_2 = a(1+e);$$
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{a_0 - a(1-e)}{a_0 - a(1+e)} = 1.3.$$



Определим максимальное угловое расстояние Меркурия и Земли от линии узлов, при котором может состояться ноябрьское или майское прохождение:

$$\gamma_1 = \frac{d_1}{l_1} = R\frac{a_0 - a(1-e)}{a_0 i a(1-e)};\quad \gamma_2 = \frac{d_2}{l_2} = R\frac{a_0 - a(1+e)}{a_0 i a(1+e)};$$
$$K = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{a_0 - a(1-e)}{a_0 - a(1+e)} \cdot \frac{(1+e)}{(1-e)} = \frac{a_0(1+e) - a(1-e^2)}{a_0(1-e) - a(1-e^2)} \approx \frac{a_0(1+e) - a}{a_0(1-e) - a} \approx 2.$$

Здесь мы также учли, что эксцентриситет орбиты Меркурия невелик, а большая полуось его орбиты a заметно меньше радиуса орбиты Земли a_0.

Временной интервал, в котором могут произойти прохождения, соответствует дуге $2\gamma_1$ в ноябре и дуге $2\gamma_2$ в мае. В градусной мере эти интервалы составляют 5° и 10°, а отрезки времени, в которых возможно наступление прохождений, составляют 5 дней для мая и 10 дней для ноября. С хорошей степенью точности полученное число 2 можно считать ответом на данную задачу.

Приведем также полное и точное решение. Меркурий проходит отрезки d_1 и d_2 с разными скоростями. Запишем выражения для скорости Меркурия в перигелии и афелии орбиты:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}};\quad v_2 = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}}.$$

Здесь M – масса Солнца. Определим время, которое Меркурий проводит на указанных отрезках своей орбиты:

$$t_1 = \frac{2d_1}{v_1} = \sqrt{\frac{4aR^2}{GMa_0^2 i^2} \cdot \frac{1-e}{1+e}}(a_0 - a(1-e)); \quad t_2 = \frac{2d_2}{v_2} = \sqrt{\frac{4aR^2}{GMa_0^2 i^2} \cdot \frac{1+e}{1-e}}(a_0 - a(1+e));$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1-e}{1+e} \cdot \frac{a_0 - a(1-e)}{a_0 - a(1+e)} = 0.86.$$

Получается, что на дуге орбиты, соответствующей майским прохождениям, Меркурий проводит даже больше времени, чем на дуге ноябрьских прохождений. Теперь нужно учесть то, что вероятность наступления самого нижнего соединения в разных точках орбиты разная, и определяется это разностью угловых скоростей Меркурия в перигелии и афелии орбиты и Земли.

Обозначим дугу на орбите Меркурия, в которой могут наступить прохождения, как **AB**. Пусть Меркурий в какой-то момент пришел в точку орбиты **A** – начальную точку дуги, в которой возможны ноябрьские прохождения. Очевидно, что это происходит с ним один раз за оборот вокруг Солнца. Определим величину дуги орбиты, в которой в этот момент должна находиться Земля, чтобы прохождение состоялось. Ввиду равномерного вращения Земли по круговой орбите (по условию задачи) величина данной дуги будет пропорциональна вероятности наступления прохождения (точнее говоря, вероятность будет равна угловой длине дуги, деленной на 2π).

Стартовая точка этой дуги для Земли, очевидно, точка **A'**, соответствующая той же гелиоцентрической долготе. Если Земля окажется там, касательное прохождение состоится в этот же момент. Другая граница дуги для Земли – некоторая точка **C'** (см. рисунок), опережающая **A'** по орбитальному движению Земли. Если Земля окажется в ней, Меркурий догонит Землю через некоторое время, находясь в точке **B**. Земля окажется в точке **B'**, и вновь состоится касательное прохождение Меркурия по диску Солнца. Нам необходимо вычислить угол θ_1, соответствующей дуге **A'C'** на орбите Земли.

Меркурий преодолевает расстояние **AB** (дуга $2\gamma_1$) за время t_1 (см. выше). За это время Земля сместится на угол

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{GM}{a_0^3}} t_1 = \sqrt{\frac{4aR^2}{a_0^5 i^2} \cdot \frac{1-e}{1+e}}(a_0 - a(1-e)).$$

Искомый угол, соответствующий дуге **A'C'**, равен

$$\theta_1 = 2\gamma_1 - \lambda_1 = \frac{2d_1}{a(1-e)} - \lambda_1 = 2R\frac{a_0 - a(1-e)}{a_0 i a(1-e)} - \sqrt{\frac{4aR^2}{a_0^5 i^2} \cdot \frac{1-e}{1+e}}(a_0 - a(1-e)).$$

После некоторых преобразований имеем

$$\theta_1 = \frac{2R(a_0 - a(1-e))}{i a_0 a(1-e)} \left(1 - \sqrt{\frac{a^3(1-e)^3}{a_0^3(1+e)}}\right).$$

Аналогичная формула для майской дуги получается сменой всех знаков перед величиной e:

$$\theta_2 = \frac{2R(a_0 - a(1+e))}{i a_0 a(1+e)} \left(1 - \sqrt{\frac{a^3(1+e)^3}{a_0^3(1-e)}}\right).$$

Отношение вероятностей и частот ноябрьских и майских прохождений составляет

$$K=\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{(a_0-a(1-e))(1+e)}{(a_0-a(1+e))(1-e)}\cdot\frac{1-\sqrt{\dfrac{a^3(1-e)^3}{a_0^3(1+e)}}}{1-\sqrt{\dfrac{a^3(1+e)^3}{a_0^3(1-e)}}}.$$

Эту формулу можно записать в более простом виде:

$$K=\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{a_0(1+e)-a(1-e^2)}{a_0(1-e)-a(1-e^2)}\cdot\frac{\sqrt{(1-e^2)}-(a/a_0)^{3/2}(1-e)^2}{\sqrt{(1-e^2)}-(a/a_0)^{3/2}(1+e)^2}=2.59.$$

Полученные формулы достаточно громоздкие. Но если в них пренебречь слагаемыми, пропорциональными e^2 и $(a/a_0)^{3/2}$, то они сведутся к уже знакомому для нас виду:

$$K\approx\frac{a_0(1+e)-a}{a_0(1-e)-a}=2.$$

Получаем, что ноябрьские прохождения по частоте более чем вдвое превышают майские. В реальности, линия апсид орбиты Меркурия строго не совпадает с линией узлов, и данное отношение меньше 2.59 и лишь незначительно превосходит 2. Майские прохождения Меркурия по диску Солнца происходят в среднем дважды за период повторяемости в 46 лет – это действительно редкие явления. Ноябрьские прохождения Меркурия за тот же период обычно случаются четырежды.

4. Рекомендации для жюри. Данное задание достаточно сложное, и оценка должна определяться, прежде всего, количеством учтенных факторов и общим построением решения. Если участник олимпиады приводит приближенное решение, описанное выше и базирующееся на вычислении отношения дуг (γ_1/γ_2) и соответствующих интервалов в ноябре и мае, когда возможны прохождения, то при условии верного выполнения оно оценивается в 6 баллов. Внутренняя структура решения при этом может отличаться от приведенной выше, примерная схема разделения оценки по этапам выглядит следующим образом: нахождение максимального расстояния Меркурия от плоскости эклиптики в общем или численном виде (h_{12}) – 2 балла, пространственные расстояния Меркурия от узла орбиты (d_{12}) – 2 балла, отношение величин дуг (γ_1/γ_2) – 2 балла, причем численные значения дуг выписывать не обязательно.

Тезисное описание полного решения задачи (попытка учета соотношения угловых скоростей Меркурия и Земли для расчета вероятности) оценивается в 1 балл, приведенное точное решение – еще в 1 балл.

Если правильный ответ (соотношение частот явлений равно 2) приводится, исходя из личного опыта и знаний участника олимпиады без математического (приближенного или полного) вывода, оценка за задание составляет 2 балла.

5. Условие. По одной из версий ученых, роль частиц темной материи могут играть «вимпы» (WIMP – weakly interacting massive particle) – элементарные частицы с энергией около 100 ГэВ. Определите среднюю концентрацию вимпов в пространстве, если масса Галактики в пределах 50 кпк от центра оценивается в $2\cdot10^{12}$ масс Солнца, а доля темной материи в ней составляет примерно 80%.

5. Решение. Определим массу частицы m, исходя из того, что ее энергия E равна 10^{11} эВ или $1.6\cdot10^{-8}$ Дж:

$$m = \frac{E}{c^2} = 2 \cdot 10^{-25} \text{ кг}.$$

Масса Галактики составляет $2 \cdot 10^{12}$ масс Солнца или $4 \cdot 10^{42}$ кг. Определим плотность темной материи в Галактике:

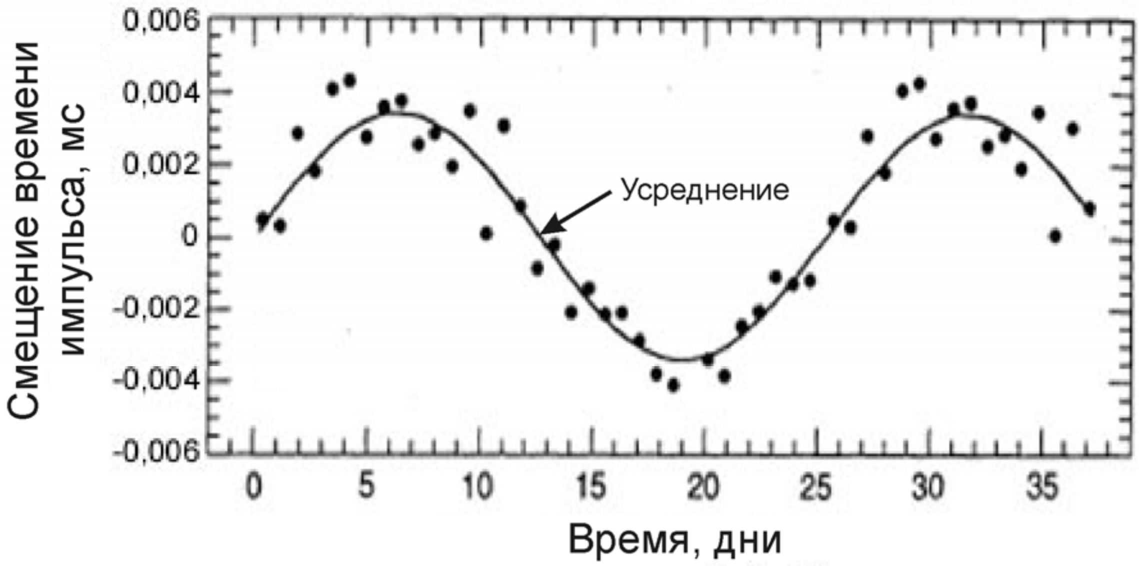
$$\rho = 0.8 \frac{3M}{4\pi R^3} = 2 \cdot 10^{-22} \text{ кг/м}^3.$$

Здесь R – радиус гало Галактики, равный 50 кпк или $1.5 \cdot 10^{21}$ м. Отсюда мы имеем концентрацию частиц:

$$n = \frac{\rho}{m} = 10^3 \text{ м}^{-3}.$$

5. Рекомендации для жюри. Для решения задачи нужно определить массу одной частицы, что оценивается в 2 балла. Далее нужно определить либо плотность темной материи в Галактике, либо общее количество частиц в ней. Оба подхода одинаково верны и оцениваются в 4 балла. Эти 4 балла не выставляются, если при вычислении допускается физическая ошибка (например, если предполагается, что темная материя расположена в диске Галактики). Расчет концентрации частиц оценивается еще в 2 балла.

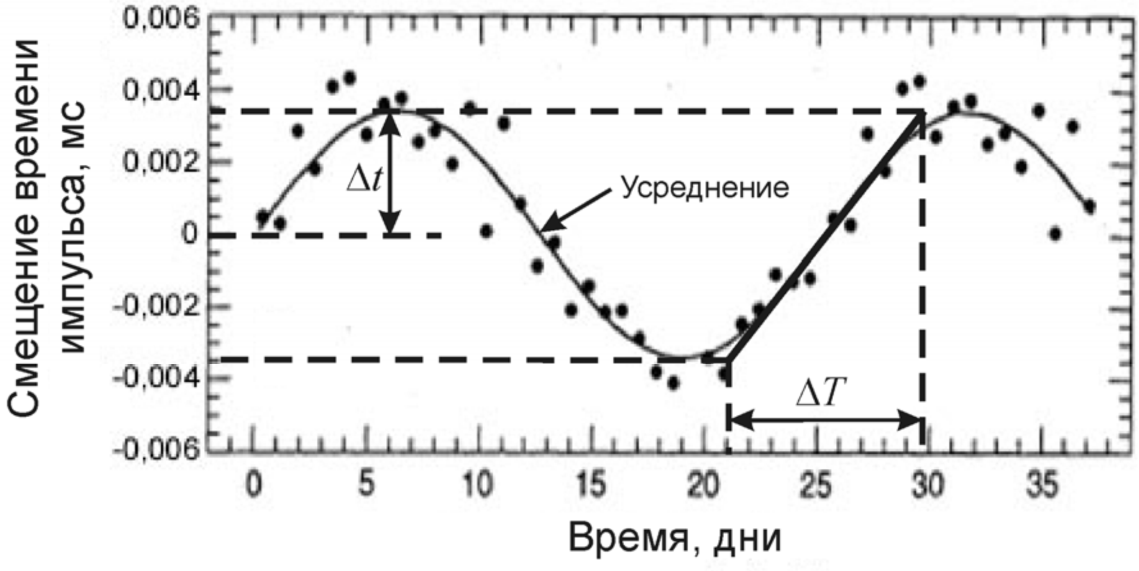
6. Условие. Пульсар PSR B1257+12 стал первым, у которого была найдена планета. Период этого пульсара составляет 6.22 мс, его масса равна 1.5 массам Солнца. Планета была обнаружена на основе того, что импульсы регистрировались не в то время, в которое они должны были поступать. На графике приведена зависимость величины смещения моментов регистрации импульсов пульсара (по сравнению с моделью без этой планеты) от времени. Оцените массу планеты, считая, что луч зрения лежит в плоскости ее орбиты.



6. Решение. Пульсар изменяет свой наблюдаемый период вследствие своего вращения вокруг общего с планетой центра масс и эффекта Доплера. По графику мы можем определить период обращения пульсара и планеты вокруг общего центра масс T, он равен 25 суткам. Само изменение периода ничтожно мало, но складываясь период за периодом, оно дает величину смещения периода наблюдаемого максимума по сравнению со случаем, если бы планеты у пульсара не было.

Задание можно решать несколькими способами. Возьмем, к примеру, момент наиболее быстрого изменения величины смещения на рисунке, проведя касательную к изображенной там кривой, и определим это изменение:

$$\eta = \frac{2\Delta t}{\Delta T} = 10^{-11}.$$



Это означает, что каждый из периодов пульсара в этот момент был в (1+η) раз больше, чем при отсутствии экзопланеты. Тем самым, мы можем определить ничтожную амплитуду лучевой скорости пульсара:

$$v = c\eta = 3 \text{ мм/с}.$$

Мы считаем, что луч зрения лежит в плоскости орбит в системе, следовательно, полученная величина совпадает с полной скоростью звезды. График представляет собой синусоиду, поэтому мы можем считать орбиту круговой, а скорости – постоянными. Вычислим радиус орбиты пульсара:

$$A = \frac{vT}{2\pi} = 1 \text{ км}.$$

При решении задачи другим способом эту же величину можно определить еще проще. Запаздывание сигналов определяется тем, насколько дальше (или ближе) расположен пульсар по сравнению с центром масс системы. Если луч зрения находится в плоскости орбит, то радиус орбиты пульсара A есть произведение максимального запаздывания импульса Δt (0.0035 мс, см. рисунок) и скорости света c.

Обозначим массы пульсара и планеты как M и m, радиус орбиты планеты A. Расстояние между компонентами системы равно

$$a_0 = a + A = \frac{A(M+m)}{m}.$$

Здесь a – большая полуось орбиты планеты. Мы учли, что из определения центра масс $AM = am$. Из III закона Кеплера имеем:

$$\frac{G(M+m)T^2}{4\pi^2} = a_0^3 = A^3\,\frac{(M+m)^3}{m^3}.$$

Масса планеты составляет

$$m = \left(\frac{4\pi^2 (M + m)^2 A^3}{GT^2} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{4\pi^2 M^2 A^3}{GT^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{v^2 M^2 A}{G} \right)^{1/3}.$$

Мы получаем значение 10^{23} кг или 1/60 массы Земли! С учетом возможного наклона орбиты планеты к картинной плоскости (при решении не рассматривалось) масса планеты может быть больше. В реальности у данного пульсара есть еще две планеты с большей массой, в данной задаче был отдельно рассмотрен эффект, по которому удалось открыть третью, наименее массивную планету.

6. Рекомендации для жюри. Первая часть решения задания связана с анализом графика, из которого участники олимпиады должны получить значения орбитального периода (1 балл), а также амплитуды лучевой скорости и/или радиуса орбиты пульсара (достаточного одного из этих параметров, 2 балла), при этом допускаются отклонения от указанных выше величин в пределах 20%. Если приведенная на графике величина воспринимается как само изменение периода пульсара, общая оценка не может превышать 2 баллов. Связь скорости (или радиуса орбиты) звезды, планеты и центра масс оценивается в 2 балла. Правильное применение III закона Кеплера (или формул кругового движения) оценивается еще в 2 балла. Наконец, последний 1 балл выставляется за вычисление массы экзопланеты.

Если правильное значение массы планеты дается без обоснований, то итоговая оценка не может быть более 2 баллов.