III Российская Олимпиада школьников по астрономии и космической физике (1995/96 г.)

Региональный этап.

Задачи для 6-7 класса.

1. Какие планеты и другие интересные небесные объекты Вы можете наблюдать сегодня ночью, если будет безоблачная погода? В каких созвездиях находятся сегодня планеты?

   Решение. Ответ, естественно, в первую очередь, будет зависеть от даты проведения Вашей олимпиады, а также от широты местности. ▲

2. Осенней ночью охотник идёт в лес по направлению на Полярную звезду. Сразу после восхода Солнца он возвращается обратно. Как должен ориентироваться охотник по положению Солнца?

   Решение. Возвращаясь, охотник должен двигаться на юг. Поскольку осенью Солнце вблизи равноденствия, оно восходит недалеко от точки востока. Следовательно нужно идти так, чтобы Солнце было слева. ▲

3. Почему свет луны в первой или последней четверти составляет меньше половины её света в полнолуние?

   Решение. Главная причина – длинные тени, которые уменьшают площадь поверхности Луны, с которой до нас доходит отражённый от Солнца свет. ▲

Задачи для 8-9 класса.

4. Какие планеты и другие интересные небесные объекты Вы можете наблюдать сегодня ночью, если будет безоблачная погода? В каких созвездиях находятся сегодня планеты?

   Решение. Ответ, естественно, в первую очередь, будет зависеть от даты проведения Вашей олимпиады, а также от широты местности. ▲

5. Каков может быть максимальный угол между Полярной звездой и Северным полюсом мира в результате прецессии земной оси? Когда это было в последний раз? Заходила ли при этом Полярная за горизонт на широте Вашего города?

   Решение. Земная ось прецессирует по конусу с углом 23,5° и периодом около 26 тысяч лет. Значит 13 тысяч лет назад Полярная была на расстоянии 47° от Северного полюса мира, высота которого над горизонтом соответствует широте Вашего города. Значит Полярная была незаходящей для широт выше 47° и заходила на территориях к югу от этой параллели. ▲

6. В шаровом звёздном скоплении NGC 5694 видимые звёздные величины звёзд на 18^m больше их абсолютных величин. Сколько световых лет до скопления?

   Решение. По определению видимые звёздные величины звёзд равны абсолютным, если звёзды находятся на расстоянии 10 Пк = 32,6 св.лет. Увеличение видимой звёздной величины на 5 соответствует отдалению звезды в 10 раз. Соответственно, увеличение на 18 зв. величин будет в том случае, когда звёзды находятся на расстоянии:

   $$32{,}6 \text{ св. лет} \times 10^{18/5} \approx 130\,000 \text{ св. лет.}$$ ▲

Задачи для 10 класса.

7. Эллиптическую орбиту кометы разделили на две части прямой линией, проходящей через центр Солнца и перпендикулярной большой оси орбиты. За время движения по какой из этих двух частей (большей или меньшей) траектории комета получает большее количество тепла?

Решение. Ответ на вопрос задачи: комета получает одинаковое количество тепла за время движения по этим частям траектории. Докажем это. Поток тепла на единицу поверхности ядра кометы составляет

$$F = \frac{L_{O}}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от кометы до Солнца (длина радиуса-вектора). Из второго закона Кеплера мы знаем, что $R^2\Delta\alpha \sim \Delta t$, где $\Delta\alpha$ – малый угол поворота радиуса-вектора за малый интервал времени Δt. Тогда количество тепла, полученное единицей поверхности ядра за время At, составляет

$$F\Delta t \sim \frac{R^2 \Delta\alpha L_O}{4\pi R^2} = \frac{\Delta\alpha L_O}{4\pi}.$$

Поскольку все величины, кроме $\Delta\alpha$, в правой части этого уравнения постоянны, оно справедливо не только для малых, но и для любых значений $\Delta\alpha$, в том числе и для $\Delta\alpha = 180^o$, который соответствует повороту радиуса-вектора при движении по каждому из приведённых в условии участков орбиты. ▲

8. Луна в апогее на 1/9 дальше, чем в перигее. На сколько процентов она при этом слабее в полнолуние? На сколько процентов в перигее больше приливная сила?

Решение. Поток света от Луны обратно пропорционален квадрату расстояния до неё, соответственно, если принять за единицу поток света от Луны в перигее, то в апогее он составит $(9/10)^2$ = 0,81, то есть уменьшится на 19%. В звёздных величинах (это требуется найти только ученикам 11 класса) это будет

$$-\frac{5}{2}\lg 0.81 \approx 0.23$$

Приливная сила обратно пропорциональна кубу расстояния до Луны, поэтому в перигее она в $(10/9)^3 \cdot 1{,}37$ раз (или на 37 %) сильнее. ▲

9. Найти первую и вторую космические скорости для Марса, диаметр которого $d_м$ = 6800 км, а средняя плотность $\rho_м$ = 3,9 г/см^3.

Решение. Первую космическую скорость можно найти из условия движения космического тела по круговой орбите с радиусом, равным радиусу Марса:

$$\frac{V_I^2}{R_м} = \frac{GM}{R_м^2}$$

откуда, выражая массу Марса через его объём и плотность, получаем

$$V_I^2 = G\rho_м \frac{4}{3}\pi R_м^3 \frac{1}{R_м}$$

$$V_I = 2R_м \left(\frac{\pi G\rho_м}{3}\right)^{1/2} = d_м \left(\frac{\pi G\rho_м}{3}\right)^{1/2}$$

Вторая космическая скорость в $2^{1/2}$ больше первой, то есть

$$V_{II} = d_м \left(\frac{2\pi G\rho_м}{3}\right)^{1/2}$$

Численные ответы: V_I = 3,54 км/с, V_{II} = 5,0 км/с. ▲

Задачи для 11 класса.

10. Эллиптическую орбиту кометы разделили на две части прямой линией, проходящей через центр Солнца и перпендикулярной большой оси орбиты. За время движения по какой из этих двух частей (большей или меньшей) траектории комета получает большее количество тепла?

Решение. Ответ на вопрос задачи: комета получает одинаковое количество тепла за время движения по этим частям траектории. Докажем это. Поток тепла на единицу поверхности ядра кометы составляет

$$F = \frac{L_O}{4\pi R^2},$$

где R – расстояние от кометы до Солнца (длина радиуса-вектора). Из второго закона Кеплера мы знаем, что $R^2\Delta\alpha \sim \Delta t$, где $\Delta\alpha$ – малый угол поворота радиуса-вектора за малый интервал времени Δt. Тогда количество тепла, полученное единицей поверхности ядра за время At, составляет

$$F\Delta t \sim \frac{R^2 \Delta\alpha L_O}{4\pi R^2} = \frac{\Delta\alpha L_O}{4\pi}.$$

Поскольку все величины, кроме $\Delta\alpha$, в правой части этого уравнения постоянны, оно справедливо не только для малых, но и для любых значений $\Delta\alpha$, в том числе и для $\Delta\alpha = 180^\circ$, который соответствует повороту радиуса-вектора при движении по каждому из приведённых в условии участков орбиты. ▲

11. Луна в апогее на 1/9 дальше, чем в перигее. Насколько (в звёздных величинах) она при этом слабее в полнолуние? На сколько процентов в перигее больше приливная сила?

Решение. Поток света от Луны обратно пропорционален квадрату расстояния до неё, соответственно, если принять за единицу поток света от Луны в перигее, то в апогее он составит $(9/10)^2 = 0{,}81$, то есть уменьшится на 19%. В звёздных величинах (это требуется найти только ученикам 11 класса) это будет

$$-\frac{5}{2}\lg 0.81 \approx 0.23$$

Приливная сила обратно пропорциональна кубу расстояния до Луны, поэтому в перигее она в $(10/9)^3 \cdot 1{,}37$ раз (или на 37 %) сильнее. ▲

12. Вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиуса $R_0 = 10000$ км обращается космический корабль с орбитальной скоростью $v_0 = 12$ км/с. В некоторый момент скорость корабля увеличили на $\Delta V = 3$ км/с без изменения её направления.

a. Чему стали равны после этого периастр и апоастр орбиты корабля?

b. Чему равна скорость корабля в апоастре.

c. Найдите массу планеты.

Решение. Решение задачи проще начать с пункта “c”. Из условия движения корабля по круговой орбите

$$\frac{V_0^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$

Получаем

$$M = \frac{V_0^2 R}{G} \approx 2.16 \cdot 10^{25}\ кг$$

Периастр орбиты корабля после увеличения скорости останется равным R. Чтобы найти апоастр орбиты и скорость корабля, используем закон сохранения энергии и II закон Кеплера (через V_1 обозначено $V_0 + \Delta V$):

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{GMm}{R_0} = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{GMm}{R_2}$$

$$V_1 R_0 = V_2 R_2$$

учитывая, что $GM = V_0^2 R_0$, и решая эти два уравнения совместно, получаем (из квадратного уравнения) два корня для R_2:

$$R_2 = R_0 \text{ и } R_2 = R_0 \frac{V_1^2}{2V_0^2 - V_1^2}.$$

Первый из них соответствует положению корабля в периастре и, следовательно нам не нужен, а второй – соответствует апоастру. Численно получаем $R_2 \approx 35\ 700$ км.

$V_2 = V_1 R_0 / R_2 \approx 4.2$ км/с. ▲