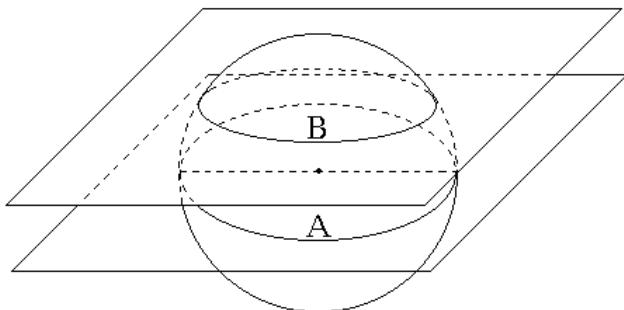


Пищов или как да решаваме задачите от Олимпиадата по астрономия

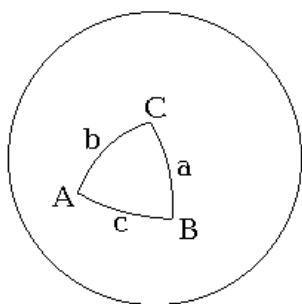
Автор: Ева Божурова
Kurtenkov edit, 2016 Apr 13



Геометрия върху сфера

Сеченията на сферата с равнини са окръжности - А, В. Сечението на сфера с равнина, минаваща през центъра на сферата, се нарича голям кръг - А.

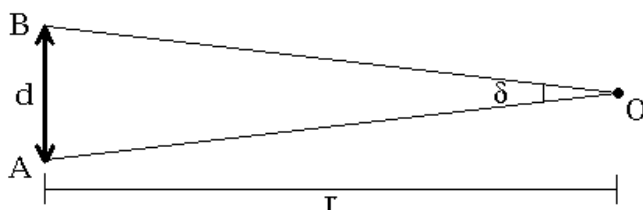
Най-кратката линия, свързваща две точки от сферата, е част от голям кръг.



Сферичният триъгълник има страни, които са дъги от големи кръгове. Ако А, В и С са ъглите при върховете му, а а, b и c са ъгловите дължини на страните му, то:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A\end{aligned}$$

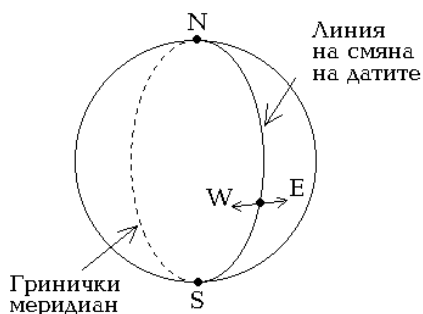
Ъгли и линейни размери на обектите



d - линейен размер на обекта АВ
 δ - видим ъглов размер на обекта
r - разстояние от наблюдателя О до обекта
Ако $d \ll r$, то:
 $d = \delta r$,
където δ е в радиани, а d и r са в еднакви мерни единици.

Когато δ се измерва:

- в градуси, то $d = (\pi/180^\circ)\delta r$;
- в дъгови минути, то $d = (\pi/(180^\circ \times 60'))\delta r$;
- в дъгови секунди, то $d = (\pi/(180^\circ \times 60' \times 60''))\delta r \approx \delta r/206265$.



Линия на смяна на датите

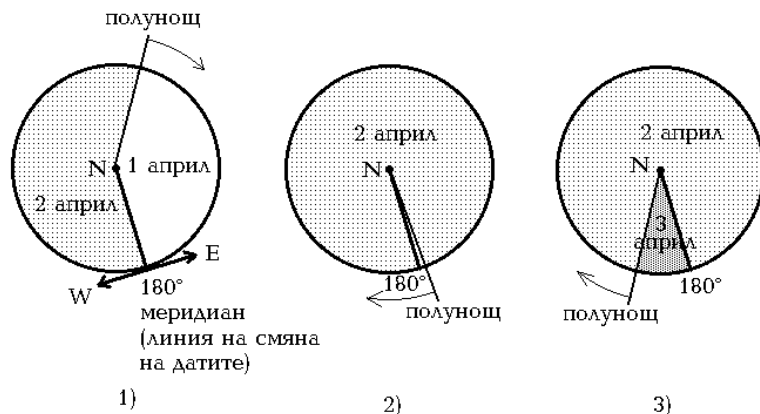
Линията на смяна на датите е меридианът, намиращ се на 180° от Гриничкия меридиан.

Когато пресичаме линията на смяна на датите:

- от запад на изток, повтаряме една дата;
- от изток на запад, прескачаме една дата.

Всъщност линиите на смяна на датите са две. Едната е 180-градусовият меридиан и е неподвижна, а другата е меридианът, на който в даден момент е полунощ, и тя се движи по земната повърхност от изток на запад. На фигурата са показани положенията на линията, където е полунощ, в три последователни момента от време.

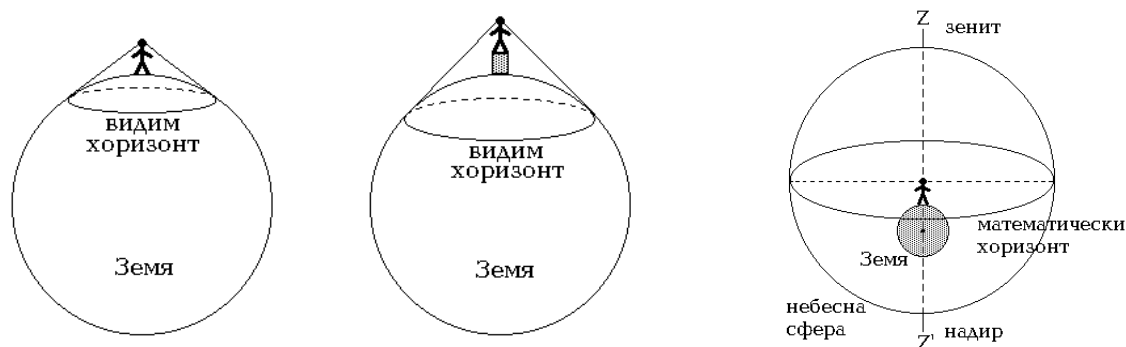
Така ако на 2 април се намираме на запад от линията на смяна на датите и я пресечем от запад на изток, то новият ден, който ще настъпи за нас след полунощ, ще бъде



отново 2 април (повтаряме една дата).

Ако на 1 април сме на изток от линията на смяна на датите и я пресечем от изток на запад, то новият ден, който ще настъпи за нас след полунощ, ще бъде 3 април прескачаме една дата).

Хоризонт



Видимият хоризонт е линия върху земната повърхност.

Математическият хоризонт е линия върху небесната сфера. Той лежи в равнина, перпендикулярна на отвесната линия ZZ' . Математическият хоризонт е голям кръг от небесната сфера (наблюдателят е в центъра на небесната сфера.). Фактически



височината на наблюдателя и радиусът на земното кълбо се пренебрегват в сравнение с радиуса на небесната сфера. Нейният център все едно е в центъра на Земята.

Меридиан на мястото и посоки на света

Z - зенит, Z' - надир

NS - земна ос

P - северен небесен полюс, P' - южен небесен полюс,

PP' - световна ос

$PZP'Z'$ - небесен меридиан на мястото. Небесният меридиан на мястото е цяла окръжност от небесната

сфера, а не половин окръжност от единия полюс до другия, както обикновено се счита

Небесният меридиан на мястото пресича хоризонта в точките Север (N) и Юг (S).



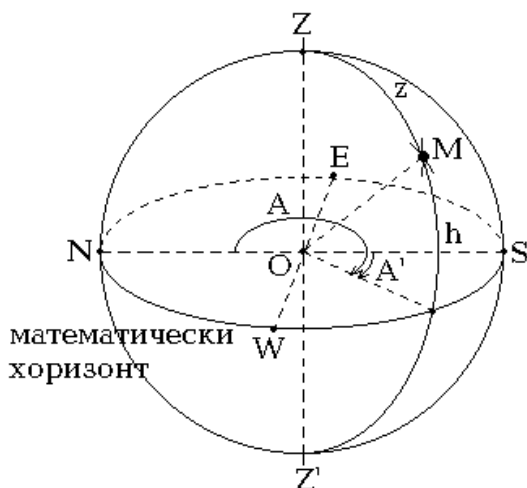
φ - географска ширина на наблюдателя

Северният небесен полюс Р е на височина над хоризонта, равна на φ - географската ширина на наблюдателя.

Колкото повече отиваме на север, толкова небесният полюс е по-високо над хоризонта. За наблюдател, намиращ се на северния полюс на Земята, P съвпада със Z . За наблюдател на земния екватор небесният екватор минава през зенита, а двата небесни полюса лежат на хоризонта в точките Север и Юг.

Ако се намираме на географска ширина φ в северното полукукло на Земята, то в последователни моменти от време можем да наблюдаваме цялата северна небесна полусфера и една ивица от южната небесна полусфера с ширина $90^\circ - \varphi$ под небесния екватор. Ако сме на северния полюс на Земята, то над хоризонта за нас във всеки момент от нощта е цялата северна небесна полусфера, но не и южната. От точка на земния екватор в последователни моменти от време за нас стават достъпни за наблюдение цялата северна и цялата южна небесна полусфера.

Хоризонтална координатна система



О - наблюдатель

h - височина на светилото над хоризонта (от 0° на хоризонта до 90° в зенита и до -90° в надира). Вместо височината, може да се използва зенитното отстояние $z = 90^\circ - h$.

Хоризонталните координати на небесните светила се променят с течение на времето и зависят от географското положение на наблюдателя.

Еклиптика



S - Слънце

T_1, T_2 - две последователни положения на Земята по нейната орбита около Слънцето

NS - земна ос

S_1, S_2 - проекции на Слънцето, гледано от Земята, върху небесната сфера

Размерите на цялата земна орбита са също пренебрежимо малки в сравнение с небесната сфера. В резултат на движението на Земята около Слънцето, проекцията на Слънцето, гледано от Земята, на фона на звездното небе се движи от запад на изток. За една година тя описва един голям кръг по небесната сфера. Той се нарича еклиптика.

П, П' - северен и южен еклиптични полюси

Земната ос NS е наклонена спрямо оста на еклиптиката PP' на ъгъл $23^{\circ}27'$.



О - земен наблюдател

P - северен небесен полюс

P' - южен небесен полюс

П и П' - северен и южен

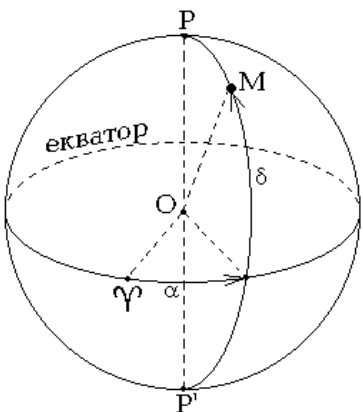
еклиптични полюси
 ♈ - пролетна равноденствена
 точка

$\underline{u}$ - есенна равноденствена точка

$\varepsilon = 23^{\circ}27'$ - наклон на земната ос спрямо перпендикуляра към еклиптиката (еклиптичната ос) и също - наклон на равнината на екватора към еклиптичната равнина. Пренебрежимо

малките размери на земната орбита около Слънцето ни дават право да пренесем успоредно еклиптичната ос ПП', така че вместо през Слънцето да минава през центъра на Земята, без да внасяме някаква грешка. Положението на еклиптичните полюси на фона на звездите при тази промяна остава същото, защото звездите са много далеч от нас.

В сравнение с по-горния чертеж, тук небесната сфера е завъртяна така, че световната ос PP' (съвпадаща със земната ос NS) да е вертикално разположена.



Екваториални координати

P - северен небесен полюс, P' - южен небесен полюс

Υ - пролетна равноденствена точка, М - небесно светило

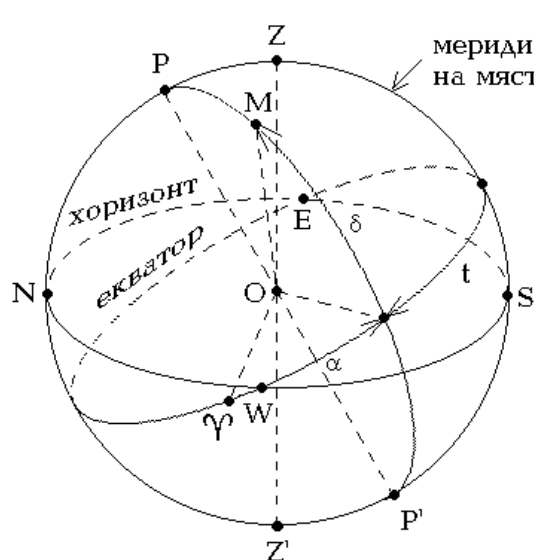
α - ректасцензия (от 0° до 360° , или от 0h до 24h)

δ - деклинация (от 0° на екватора до 90° на северния небесен полюс и до -90° на южния небесен полюс)

Ректасцензията се отчита по екватора в посоката, в която става годишното движение на Слънцето по еклиптиката.

Тя е обратна на посоката на видимото денонощно въртене на небесната сфера. Ректасцензията и деклинацията на светилото не зависят от времето (в първо приближение, като не се отчитат прецесията и нутацията на земната ос) и от географското място на наблюдателя, за разлика от височината и азимута.

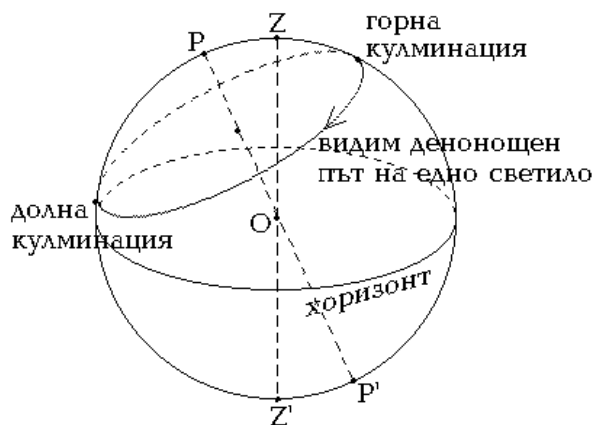
Часов ъгъл



P - северен небесен полюс
P' - южен небесен полюс
 γ - пролетна равноденствена точка
Z - зенит
Z' - надир
N, E, S, W - световни посоки
M - небесно светило
t - **часов ъгъл**
Часовият ъгъл се отчита от меридиана на мястото в посоката на видимото денонощно въртене на небесната сфера. Това е обратно на посоката на отчитане на ректасцензията.
Часовият ъгъл зависи от местното време.

Еклиптични координати

В еклиптичната координатна система основни елементи са северният и южният еклиптични полюси и еклиптиката. Еклиптичните координати са еклиптична ширина β и еклиптичната дължина λ . Еклиптичната ширина на едно светило е ъгловото разстояние от еклиптиката до светилото и е аналогична на деклинацията при екваториалните координати. Еклиптичната дължина е аналогична на ректасцензията при екваториалните координати - отчита се също от пролетната равноденствена точка и в същата посока, но не по небесния екватор, а по еклиптиката. Слънцето прави една обиколка по еклиптиката за една година (в първо приближение - тропическа година, равна на $365^d.2422$). Следователно всяко положение на Слънцето по еклиптична дължина съответства на определен момент от годината. Например, всяка година моментът на максимална активност на един метеорен поток може да се случва при една и съща слънчева еклиптична дължина, макар че това съответства на различен час от денонощието или дори на различна дата през различните години.



Горна и долна кулминация на светилата

P, P' – северен и южен небесен полюс
Z - зенит, Z' - надир
Меридиан на мястото - окръжността, която минава през P, P', Z, Z'. Горната и долната кулминации на едно светило са моментите, когато при видимото денонощно въртене на

небесната сфера то пресича меридиана на мястото.

Когато наблюдателят се намира на някаква географска ширина $\varphi(1)$, за него има незалязващи светила, изгряващи и залязващи светила и неизгряващи светила. Ако наблюдателят е на северния полюс на Земята (2), то при видимото денонощно движение на небесната сфера светилата остават на еднаква височина над хоризонта. Ако наблюдателят е на земния екватор (3), светилата изгряват и залязват перпендикулярно на хоризонта.



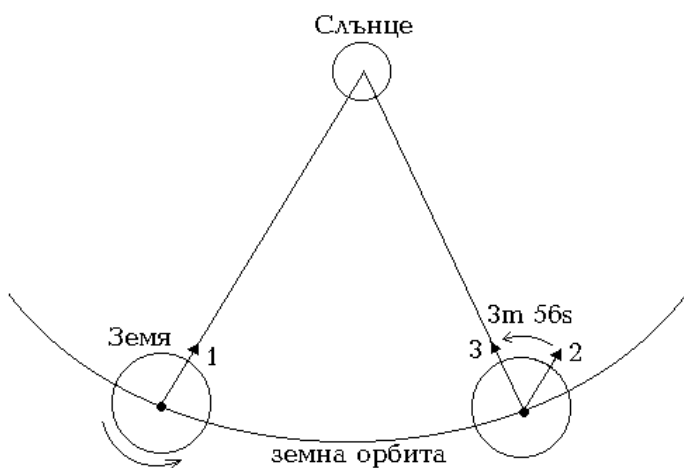
Звездно и слънчево време

Местно пладне - момент на горна кулминация на Слънцето

Местна полунощ - момент на долна кулминация на Слънцето

Слънчево денонощие - периодът между две последователни едноименни кулминации на Слънцето за дадено географско място, т.е. периодът на видимото денонощно обикаляне на Слънцето около Земята

Звездно денонощие - периодът между две последователни едноименни кулминации на пролетната равноденствена точка (или на някоя звезда в първо приближение) за дадено географско място, т.е. периодът на видимото денонощно въртене на звездното небе около Земята, или периодът на въртене на Земята относно т.нар. неподвижни звезди.



Звездното денонощие е с 3^m56^s по-кратко от слънчевото.

1 - начално положение

2 - положение след едно звездно денонощие - едно завъртане на Земята спрямо неподвижните звезди

3 - положение след едно слънчево денонощие

От гледна точка на земния наблюдател Слънцето извършва видимо годишно движение по еклиптиката - мести се на фона на

звездите от запад на изток с по 3^m56^s на денонощие. Видимото денонощно въртене на небесната сфера става в обратна посока - от изток на запад. Слънцето участва и в него, но изостава от звездите с по 3^m56^s на денонощие.

Местно звездно време s - то е равно на часовия ъгъл на пролетната равноденствена точка.

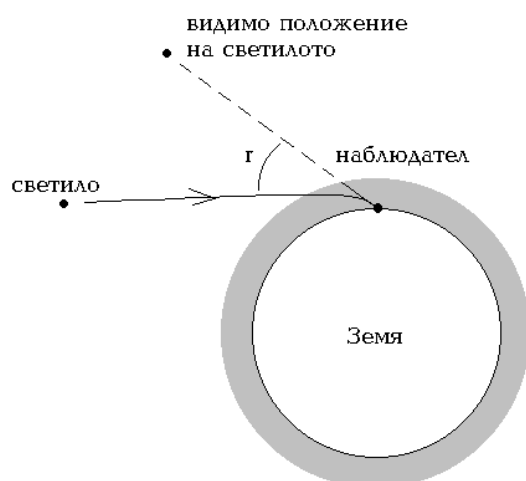
Звездното време се измерва в звездни часове, звездни минути и звездни секунди.

24 звездни часа = 24 часа слънчево време - $3^m56^s = 23$ часа 56^m4^s слънчево време

1 звезден час = 23 часа $56^m04^s / 24$ часа = 0.9973 часа слънчево време

1 час слънчево време = 1.0027 звездни часа

В момент от звездно време s , когато часовият ъгъл на едно небесно светило с ректасцензия α е t (виж фигурата в раздел „Часов ъгъл“): $s = \alpha + t$



Рефракция

Рефракция е видимото отместване на небесните светила спрямо хоризонта в резултат от пречупването на светлинните лъчи в земната атмосфера.

r - ъгъл на рефракция

Ъгълът на рефракция се увеличава с приближаване към хоризонта. Той зависи от атмосферните условия. Може да достигне до $35'$.

Календар

Юлиански календар - въведен от Юлий

Цезар през 45 г. пр.н.е. Годината има 365 дни. На всеки 4 години 1 е високосна с 366 дни. Високосни са годините, чиито номер се дели на 4.

Григориански календар - въведен от папа Григорий XIII през 1582 г. Той е същият, като Юлианския, но:

- стотните години (чиито номер се дели на 100) **не** са високосни
- високосни остават стотните години, чиито номер се дели на 400

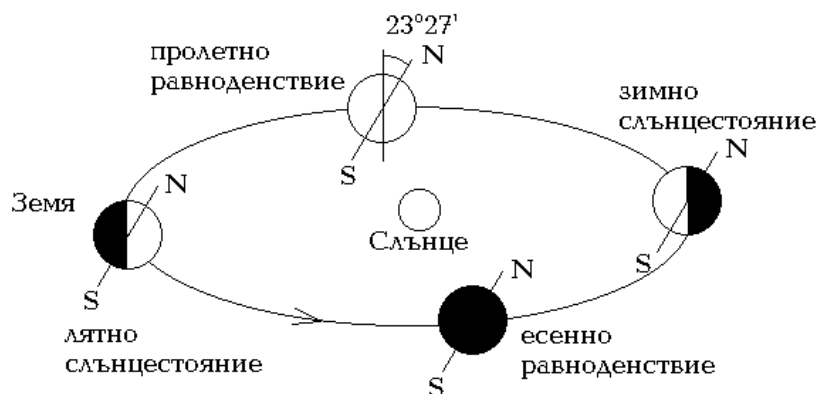
Примери: 1996 - високосна, 1997 - не е високосна; 1700, 1800, 1900 - не са високосни, 1600 и 2000 **са** високосни.

В България Григорианският календар (нов стил) е въведен през 1916 г., когато за да се компенсира разликата от 13 дни, датата 31 март е била последвана от 14 април..

Въвеждането на високосни години за корекция се налага поради факта, че тропическата година, на която се основава календарът, не съдържа цяло число денонощия, а $365^d05^h48^m45^s.98 \approx 365^d.2422$. Замяната на Юлианския календар с Григорианския се е наложила от това, че тропическата година не е точно равна на 365 и една четвърт денонощия.

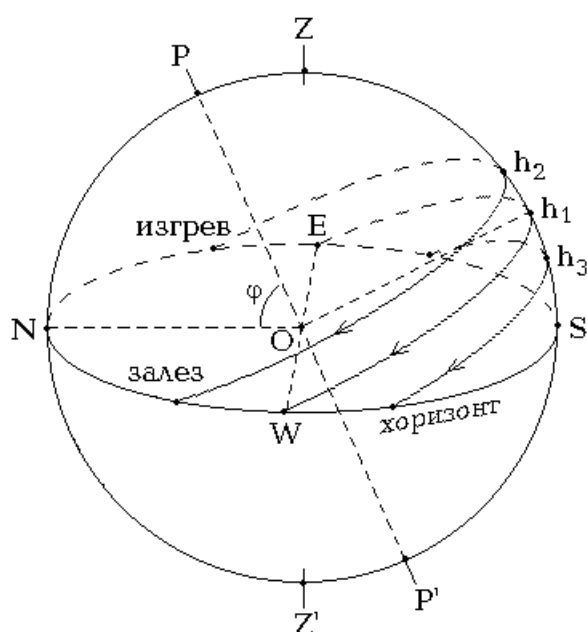
Тропическа година - времето между две последователни преминавания на Слънцето през пролетната равноденствена точка. Поради прецесията (обратното движение на пролетната равноденствена точка по еклиптиката) тропическата година е малко по-кратка от периода на обикаляне на Земята около Слънцето относно неподвижните звезди - звездна година ($365^d06^h09^m09^s.54$). Календарът се основава на тропическата година, понеже тя е свързана с периода на смяна на годишните времена, а това е по-удобно за ежедневиия живот.

Смяна на годишните времена



Наименованията на моментите от годината се отнасят за Северното полукълбо

Поради обикалянето на Земята около Слънцето и наклона на земната ос, се сменят годишните времена, променят се продължителността на деня и нощта и точките на изгрев и залез на Слънцето се местят по хоризонта по различен начин за различни географски ширини.



Видим денонощен път на Слънцето за географска ширина при равноденствията и слънцестоянията.

PZP'Z' - меридиан на мястото

$h_1 = 90^\circ - \varphi$ — височина на Слънцето над хоризонта по пладне (горна кулминация) в пролетно или есенно равноденствие (за нашата ширина $\varphi = 43^\circ \rightarrow h_1 = 47^\circ$).

$h_2 = 90^\circ - \varphi + 23.5^\circ$ — височина на Слънцето по пладне при лятно слънцестояние (за $\varphi = 43^\circ \rightarrow h_2 = 70.5^\circ$). Слънцето изгрява от североизток и залязва на северозапад.

Денят е дълъг, а нощта - кратка.

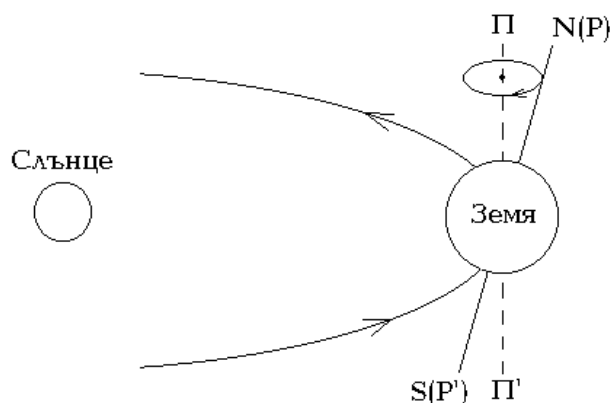
$h_3 = 90^\circ - \varphi - 23.5^\circ$ — височина на Слънцето по пладне при зимно слънцестояние (за $\varphi = 43^\circ \rightarrow h_3 = 23.5^\circ$). Слънцето изгрява от югоизток и залязва на югозапад. Денят е кратък, а нощта - дълга.



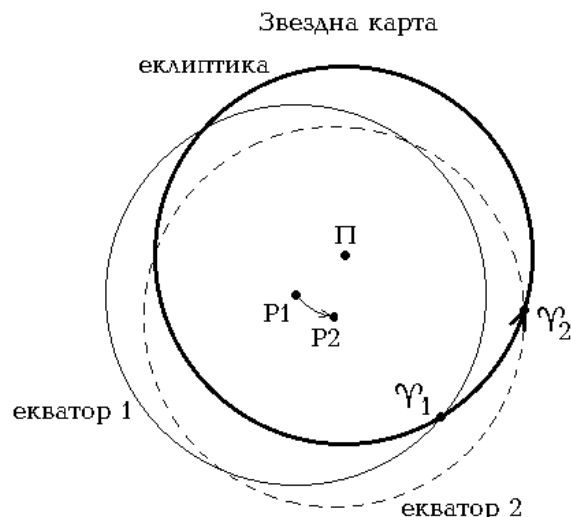
1 - зони, където през лятното полугодие се наблюдават нощи, в които Слънцето не залязва под хоризонта (а през зимата - дни, в които то не изгрява). Периодите на такива нощи са разположени около моментите на лятно слънцестояние и продължителността им постепенно нараства от 0 дни до 6 месеца между географските ширини $66^\circ 33'$ и 90° .

2 - зони, където в някакви моменти от време еклиптиката минава през зенита.

Прецесия



Земята ос прецесира - върти се под наклон около оста на еклиптиката в посока, **обратна** на посоката на движение на Земята около Слънцето, с период приблизително 26000 години.



Π и Π' - полюси на еклиптиката.

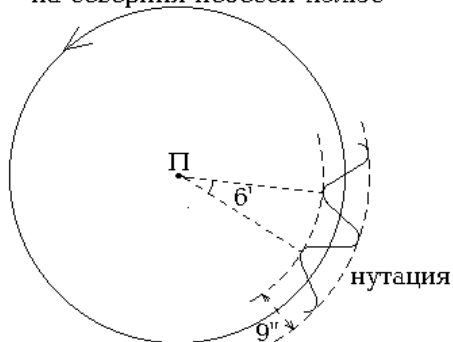
P₁ - настоящо положение на северния небесен полюс на фона на съзвездията

P₂ - положение на северния небесен полюс след известно време - изместване в резултат от прецесията

Π - северен полюс на еклиптиката - намира се в Дракон (близо до главата на Дракона, $\alpha = 18^h$, $\delta = 66^\circ 33'$)

За 26000 години P описва кръг с радиус $23^\circ 27'$ около Π.

прецесионно движение
на северния небесен полюс



γ_1 - положение на пролетната равноденствена точка на фона на съзвездията сега

γ_2 - положение на пролетната равноденствена точка след известно време.

Пролетната (и есенната, разбира се) равноденствена точка бавно се мести от изток на запад по еклиптиката с $50''.26$ годишно. Следователно екваториалните координати на звездите α и δ не са постоянни с времето, а звездните карти остаряват. Затова α и δ се дават за определена епоха - относно положението на γ за определена година, например за епоха 1950 или 2000 г.

Нутация

Освен прецесията, земната ос извършва и друг вид малки колебания, наречени нутация. Периодът им е 18.6 години.

Π - полюс на еклиптиката

Движения на планетите

Меркурий и Венера - **вътрешни планети**

Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун - **външни планети**

Вътрешна планета:

В горно и долно съединение не се вижда от Земята.

В максимална западна или източна елонгация е на най-голямото възможно ъглово отстояние съответно на запад или на изток от Слънцето. Това са периодите на най-добра видимост на планетата от Земята.

Източна елонгация - вечерна видимост на запад слез залеза на Слънцето. Тогава Венера се вижда като Вечерница.

Западна елонгация - сутрешна видимост на изток преди изгрева на Слънцето. Тогава Венера се вижда като Зорница.



Външна планета

Противостояние - най-добра видимост, намира се на 180° отстояние от Слънцето, вижда се през цялата нощ.

Западна и източна квадратура - планетата се вижда на 90° на запад или на изток от Слънцето.

Съединение - планетата не се вижда.

Видимите движения на планетите стават близо до еклиптиката.

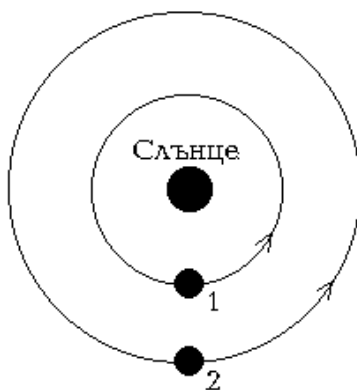
Сидеричен период T_{SID} на орбитално движение на една планета се нарича периодът ѝ на обикаляне около Слънцето относно т.нар. неподвижни звезди (орбиталният период на планетата, за който обикновено говорим).

Синодичен период T_{SYN} на орбитално движение на една вътрешна планета се нарича периодът между две последователни долни съединения на планетата, а за една външна планета - периодът между две последователни противостояния.

Ако $T_\oplus$ е периодът на обикаляне на Земята около Слънцето, то:

- за вътрешна планета: $1/T_{SYN} = 1/T_{SID} - 1/T_\oplus$
- за една външна планета: $1/T_{SYN} = 1/T_\oplus - 1/T_{SID}$

Тези формули лесно могат да бъдат изведени от следните съображения:



Ако T_1 и T_2 са съответно сидеричните периоди на планетите 1 и 2, то периодът T_{12} между две последователни противостояния на планетата 2 спрямо планетата 1 е синодичен период. Той може да се резглежда като период на обикаляне около Слънцето на планетата 2 в координатна система, неподвижно свързана с планетата 1. Т.е., ако ω_1 и ω_2 са ъгловите скорости на движение на планетите 1 и 2 около Слънцето относно неподвижните звезди, а ω_{12} е ъгловата скорост на движение около Слънцето на планетата 2 в координатна система, неподвижно свързана с планетата 1, то:

$$\omega_{12} = \omega_2 - \omega_1$$

Тъй като съгласно третия закон на Кеплер планетата 2 се движи около Слънцето с по-малка ъглова скорост, отколкото планетата 1, т.е. $\omega_2 < \omega_1$, то $\omega_{12} < 0$.

Имайки пред вид, че $\omega = 2\pi/T$, получаваме:

$$-1/T_{12} = 1/T_2 - 1/T_1 \quad \text{или} \quad 1/T_{12} = 1/T_1 - 1/T_2$$

Ако считаме планетата 1 за Земята, получаваме съотношението за външна планета (в случая планетата 2), а ако считаме планетата 2 за Земята, то получаваме съотношението за вътрешна планета (в случая планетата 1).

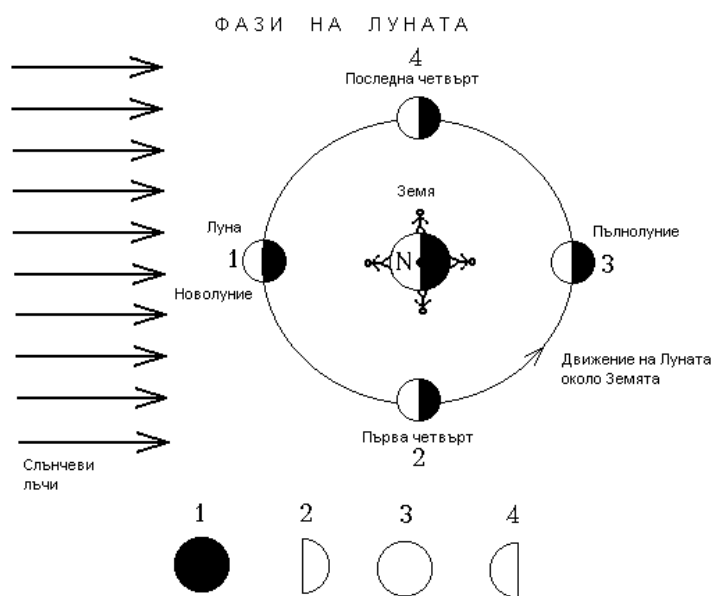
По подобен начин може да се получи съотношение между слънчевото денонощие $T_{\odot}$, звездното денонощие $T_{\star}$, и периода на обикаляне на Земята около Слънцето $T_{\oplus}$:

$$1/T_{\odot} = 1/T_{\star} - 1/T_{\oplus}$$

Движение и фази на Луната

Как виждаме Луната в различните фази:

1. новолуние
2. първа четвърт, дясната половина на лунния диск е осветена; Луната е растяща
3. пълнолуние
4. последна четвърт, лявата половина на лунния диск е осветена; Луната "старее", смалява се.



Вид на лунните фази за наблюдател от Северното полукълбо

При новолуние Луната е над хоризонта през деня заедно със Слънцето.

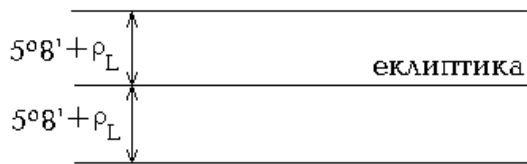
При първа четвърт тя е на 90° източно от Слънцето, като осветената част от диска е обърната в посока към Слънцето, естествено. Над хоризонта е през втората половина на деня и през първата половина на нощта.

При пълнолуние е на 180° отстояние от Слънцето и се вижда през цялата нощ.

При последна четвърт Луната е на 90° западно от Слънцето и е над хоризонта през втората половина от нощта и първата половина от деня.

Поради движението на Луната около Земята, Луната се мести на фона на съзвездията от запад на изток. Това движение е доста бързо — тя се премества на фона на звездите с $13^\circ 10' 35''$ на денонощие, т.е. Луната се премества с приблизително $0,5^\circ$ (или с един свой диаметър) на час. Затова всеки ден изгревът на Луната закъснява с около 1 час спрямо времето на изгрева ѝ предишния ден.

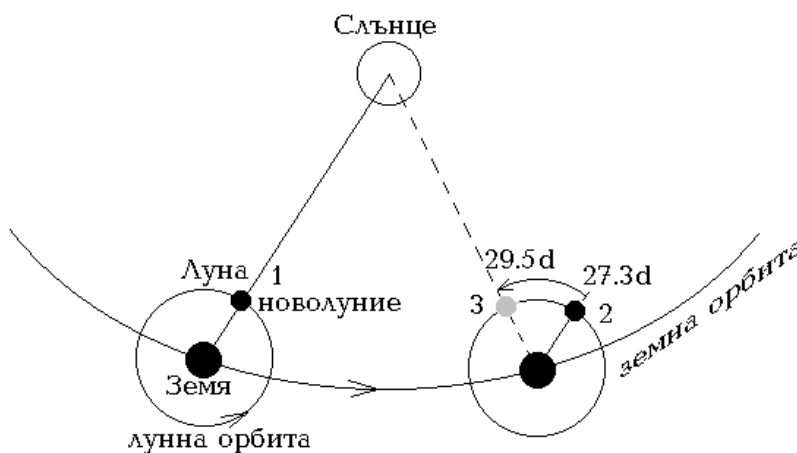
Наклон и прецесия на лунната орбита



Лунната орбита е наклонена на $5^{\circ}08'$ относно равнината на еклиптиката. Следователно покрития на звезди от Луната стават в зоната около еклиптиката с ширина $2 \times (5^{\circ}08' + \rho_L)$, където ρ_L е видимият ъглов радиус на Луната. Лунната орбита прецесира с период ≈ 18 год. 11 дни около оста на еклиптиката и

следователно в различни моменти от време Луната може да се намира навсякъде из тази зона на фона на звездите.

Сидеричен (звезден) и синодичен месец



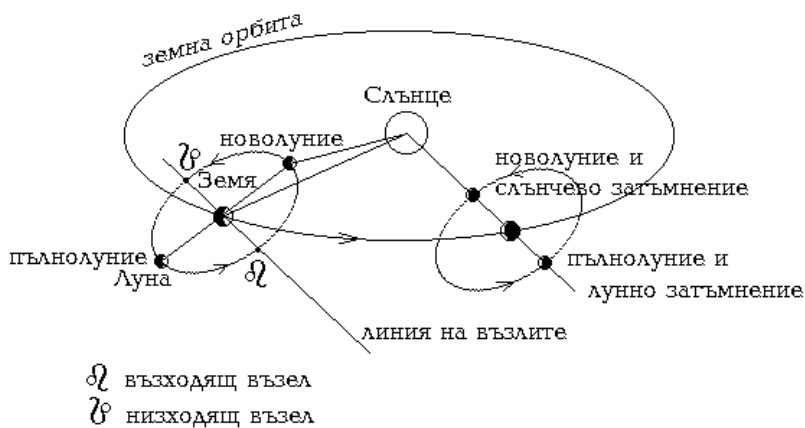
Синодичен месец е периодът между две едноименни лунни фази. Той е равен на $29^d,53$. Сидеричен месец е периодът на въртене на Луната около Земята спрямо звездите. Равен е на $27^d,32$.

- 1 - начално положение
- 2 - положение след един сидеричен месец
- 3 - положение след един синодичен месец

Съотношението между синодичния месец M_{SYN} , сидеричния месец M_{SID} и периода на обикаляне на Земята около Слънцето $T_{\oplus}$: $1/M_{\text{SYN}} = 1/M_{\text{SID}} - 1/T_{\oplus}$

Затъмнения

Лунни и слънчеви затъмнения



съединява, е линия на възлите.

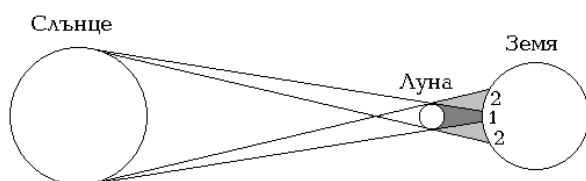
Лунната орбита е наклонена към еклиптиката на $5^{\circ}08'$. Поради това не при всяко новолуние има слънчево затъмнение и не при всяко пълнолуние - лунно затъмнение. При движение на Земята около Слънцето лунната орбита остава успоредна сама на себе си (ако пренебрегнем прецесията ѝ). Точките, в които лунната орбита пробоща равнината на еклиптиката, се наричат възли. Линията, която ги

Затъмненията стават, когато линията на възлите на лунната орбита е достатъчно близка или съвпада с линията, свързваща Земята и Слънцето. В такъв период от годината може да се случи едно затъмнение или поредица от две, или най-много три, редуващи се през две седмици, слънчеви и лунни затъмнения. Подобни периоди на затъмнения има обикновено два пъти годишно, при което Земята се намира в две диаметрално противоположни области на орбитата си около Слънцето. Поради прецесията на лунната орбита всяко следващо съвпадение на линията на възлите с линията Земя-Слънце се случва малко по-рано от половин година след предишното. Така в една календарна година могат да се случат и три периода на затъмнения. В годината може да има общо най-малко 2 и най-много 7 затъмнения, като от 0 до 3 могат да са лунните и от 2 до 5 слънчевите.

Периодът на повтаряне на взаимните положения на Земята, Луната и Слънцето, т.е. на повторение на редуващите се по определена закономерност лунни и слънчеви затъмнения, е 6584 дни, което е равно на 18 години и 11 дни (или 18 години и 10 дни, ако в 18-те години има не 4, а 5 високосни). Това е и периодът на прецесия на лунната орбита. Нарича се сарос.

Слънчево затъмнение

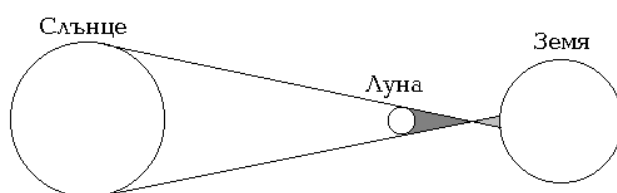
Пълно слънчево затъмнение: Всяка точка от повърхността на едно светещо тяло излъчва светлина във всички посоки. В следващите фигури са начертани само най-важните лъчи, излизащи от определени точки от повърхността на Слънцето.



- 1 - лунна сянка (зона на пълно слънчево затъмнение)
- 2 - полусянка (зона на частично слънчево затъмнение)

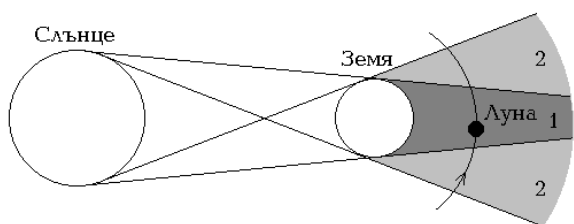
Диаметърът на лунната сянка върху земната повърхност е само 200-400 км.

Луната постепенно закрива видимия слънчев диск от запад на изток. Лунната сянка се движи по земната повърхност от запад на изток.



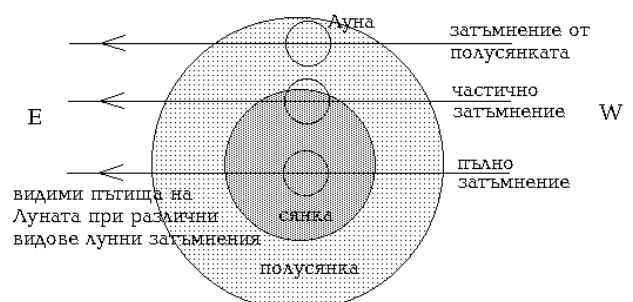
Пръстеновидно затъмнение: При пръстеновидно затъмнение Луната не закрива целия видим слънчев диск, а един светъл пръстен от него остава да се вижда около тъмния лунен диск.

Лунно затъмнение

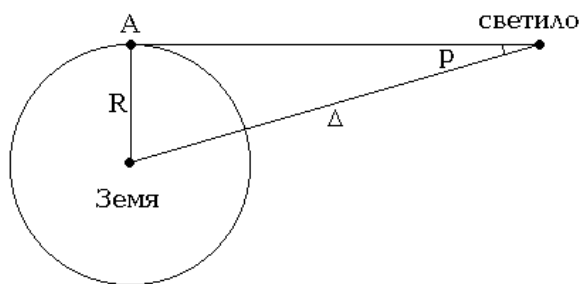


- 1 - земна сянка, 2 - полусянка

Луната навлиза в земната сянка от запад на изток.



Паралакси и разстояния до телата в Слънчевата система и до звездите



Денонощен хоризонтален паралакс

R - радиус на Земята

Δ - разстояние от центъра на Земята до светилото

A - земен наблюдател

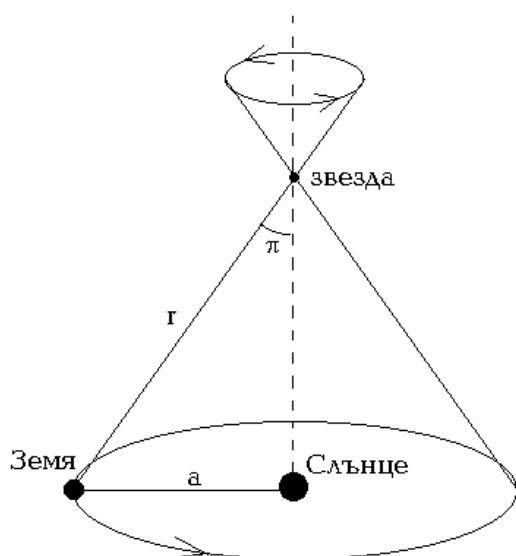
p - денонощен хоризонтален паралакс

$$\Delta = R / \sin p$$

Денонощният хоризонтален паралакс на

луната е $p_L = 57'$, а на Слънцето $p_s = 8.8''$. Денонощният паралакс се използва за определяне на разстоянията от нас до телата в Слънчевата система.

Годишен паралакс



r - разстояние до звездата

a - средно разстояние между Земята и Слънцето

ъгъл π - паралакс на звездата

$$r = a / \sin \pi$$

Понеже е малък, $\sin \pi \approx \pi [\text{rad}]$.

$$1 \text{ rad} = 206265'' \text{ (дъгови секунди)}$$

$$r = 206265 a / \pi''$$

a = 1 AU (астрономическа единица) = 150×10^6 км

$$r [\text{AU}] = 206265 / \pi''$$

Парсек: $r = 1$ парсек (pc), когато $\pi = 1''$

$$1 \text{ pc} = 3.26 \text{ ly (светлинни години)} = 206265 \text{ AU}$$

$$r [\text{pc}] = 1 / \pi''$$

На фигурата е показан частен случай, когато звездата се намира на права линия, минаваща през Слънцето и перпендикулярна на равнината на еклиптиката. Звезди, намиращи се в други положения, при видимото си годишно паралактично движение описват върху небесната сфера елипси с различен ексцентрицитет. Паралаксът на такива звезди е равен на ъловия размер на големите полуоси на описваните от тях елипси. Елипсите, които описват звездите, са толкова по-сплеснати, колкото по-близо са звездите до равнината на земната орбита около Слънцето. Елипсите, описвани от звезди, които лежат в равнината на земната орбита (т.е., които са на еклиптиката върху небесната сфера), се израждат в отсечки.

Метод на цефеидите за определяне на разстоянията в Космоса:

Цефеидите са пулсиращи променливи звезди. Те са свръхгиганти с много висока светимост и се виждат на големи разстояния. Могат да се различат като отделни звезди дори в други галактики. Периодът им на изменение на блясъка е толкова по-голям, колкото по-голяма е светимостта им. Тази закономерност е изучена и може да се използва за определяне на разстоянията до цефеидите. Периодът на дадена цефеида се определя от наблюдения. От зависимостта период-светимост, получена въз основа на други наблюдавани цефеиди, по периода на цефеидата се определя нейната светимост

L. От светимостта ѝ може да се изчисли абсолютната ѝ звездна величина M . Измерва се видимата звездна величина на цефеидата m и по формулите, дадени в раздел Астрофизика, се изчислява разстоянието до нея r . По него може да се съди и за разстоянието до галактиката, в която се намира цефеидата.

Механика

Втори принцип на Нютон: Ако на тяло с маса m действа сила F , тялото се движи с ускорение a , при което: $F = ma$.

Импулс на тяло с маса m , движещо се със скорост v , е величината $p = mv$.

Момент на импулса на тяло с маса m , движещо се по окръжност с линейна скорост v около някакъв център на разстояние r от този център, е величината $M = mvr = m\omega r^2$.



Ъгловата скорост на тялото е $\omega = v/r = 2\pi v = 2\pi/T$, където v е честотата, а T е периодът на обикаляне на тялото около центъра.

Кинетична енергия на тяло с маса m , движещо се със скорост v , е величината $E_k = mv^2/2$.

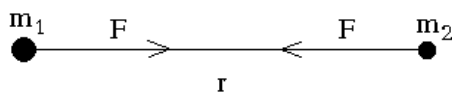
За затворени механични системи са в сила законите за запазване на импулса, момента на импулса и енергията. Когато едно тяло се движи с линейна скорост v (или ъглова скорост $\omega = v/r$) по окръжност с радиус r , то има центростремително ускорение:

$$a_c = v^2/r = \omega^2 r.$$

Такова центростремително ускорение може да се придава на тялото примерно от гравитационна сила, създавана от друго тяло, намиращо се в центъра на окръжността. Нека разгледаме координатна система, свързана с тялото, което се движи с постоянна скорост по окръжност. Движението на тялото е ускорително (тялото има центростремително ускорение). Тъй като тялото не се движи равномерно праволинейно, свързаната с него координатна система е неинерциална. Относно такава координатна система действат т.нар. инерчни сили, които не съществуват при разглеждане на същата ситуация относно инерциална координатна система, свързана, например с неподвижен страничен наблюдател. В нашия случай има една инерчна сила, която се нарича центробежна. Тя е равна по големина на центростремителната сила $F_{cp} = ma_c = mv^2/r$ и действа върху тялото в посока, обратна на посоката към центъра на въртене.

Гравитация

Закон на Нютон:



$$F = Gm_1 m_2 / r^2$$

F - сила на привличане между две тела

m_1 и m_2 - маси на телата

r - разстояние между тях

$G = 6.67 \times 10^{-11} [m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}]$ — гравитационна константа.

Ускорение на силата на тежестта на повърхността на кълбовидно тяло с маса M и радиус R :

$$g = GM/R^2$$

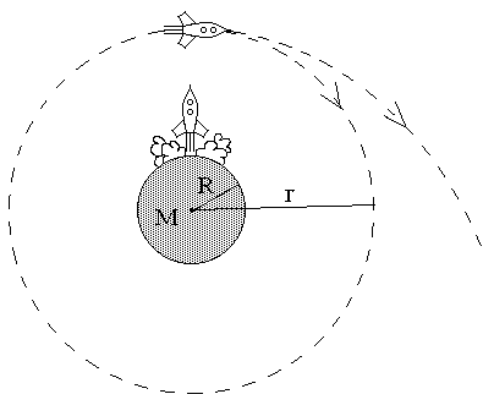
за Земята $g = 9.8 \text{ kg.m.s}^{-2}$.

Ускорението на силата на тежестта на разстояние r от центъра на тялото ($r > R$) е:

$$g = GM/r^2$$

Гравитационната сила, с която дадено тяло действа на други тела, намиращи се на еднакви разстояния от него, им придава еднакви ускорения, независимо от техните маси.

Космически скорости



Първа космическа скорост: минималната необходима скорост на едно тяло, за да стане то спътник на тялото M (да се движи около него по кръгова орбита с радиус R).

$$v_1 = (GM/R)^{1/2},$$

където G е гравитационната константа.

За Земята $v_1 = 7.9 \text{ km/s}$

За да се движи едно тяло по кръгова орбита с радиус r ($r > R$), то трябва да има скорост, равна на кръговата скорост:

$$v_{\text{кр}} = (GM/r)^{1/2}$$

Втора космическа скорост: минималната необходима скорост на едно тяло, за да напусне то завинаги тялото M (да се отдалечава по парабола), стартирайки от повърхността му.

$$v_2 = (2GM/R)^{1/2}$$

За Земята $v_2 = 11.3 \text{ [km/s]}$

Ако тялото-спътник се намира на разстояние r ($r > R$) от тялото M , минималната скорост, необходима на тялото-спътник да не остава в орбита около тялото M , а да се отдалечава вечно от него, е параболичната скорост:

$$v_{\text{пар}} = (2GM/r)^{1/2}$$

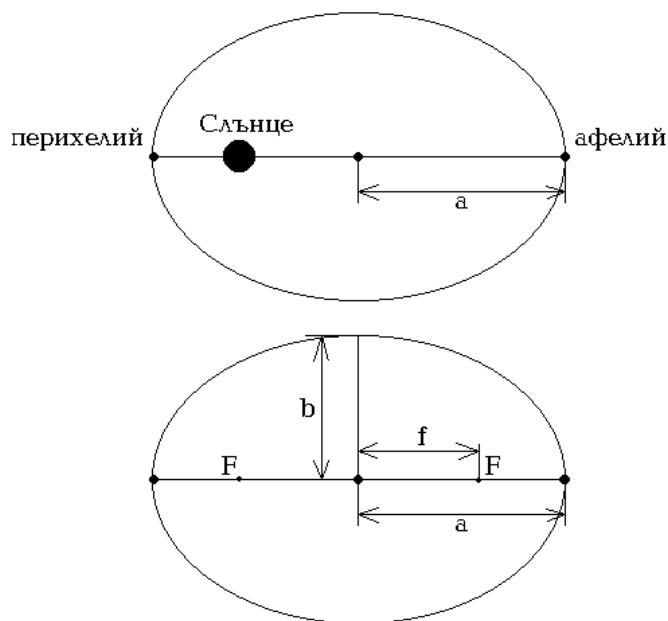
Черни дупки

Втора космическа скорост за тяло с маса M е $v_2 = (2GM/R)^{1/2}$. Ако започнем да свиваме тялото, без да променяме масата му (само R намалява), то v_2 ще расте. Следователно ще става все по-трудно от повърхността му да излети друго тяло, така че завинаги да го напусне. Когато тялото M се свие дотолкова, че v_2 се изравни със скоростта на светлината c , то се превръща в черна дупка. Това става при радиус:

$$R_s = 2GM/c^2$$

Радиусът R_s се нарича радиус на Шварцшилд.

Закони на Кеплер



I Закон. Планетите се движат около Слънцето по елипси, в един от фокусите на които се намира самото Слънце.

a - голяма полуос на елипсата

b - малка полуос на елипсата

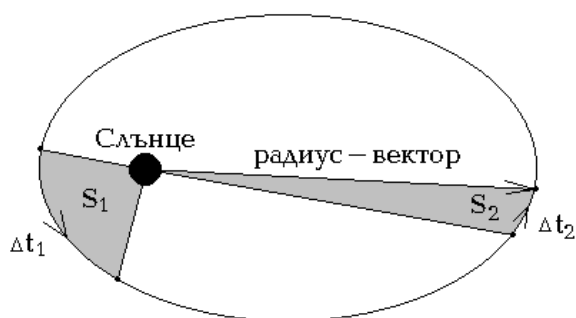
f - фокусно разстояние

Ексцентрицитетът на елипсата e :

$$e = f/a = (a^2 - b^2)^{1/2}/a$$

Когато $e = 0$, елипсата става окръжност с радиус $r = a = b$, а когато $e = 1$, елипсата се сплесква до отсечка с дължина $2a$.

Разстоянието от Слънцето до планетата в перихелий е: $r_{\text{пер}} = a - f = a(1 - e)$,
а разстоянието в афелий: $r_{\text{аф}} = a + f = a(1 + e)$



II Закон. Планетите се движат по орбитите си неравномерно. За равни интервали от време радиус-векторът на планетата описва равни по големина площи от орбитата.

$\Delta t_1, \Delta t_2$ - интервали от време

S_1, S_2 - описвани площи

Ако $\Delta t_1 = \Delta t_2$, то $S_1 = S_2$.

Следователно близо до перихелия на орбитата си планетата се движи най-бързо, а близо до афелия—най-бавно.

III Закон.

$$a_1^3/T_1^2 = a_2^3/T_2^2 = K$$

където:

a_1 и a_2 - големи полуоси на орбитите на планетите 1 и 2

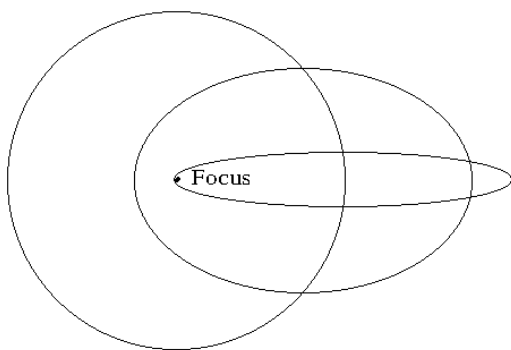
T_1 и T_2 - периоди на обикаляне около Слънцето на планетите

$K = GM_{\odot}/4\pi^2$ - константа на Кеплер, $M_{\odot}$ - маса на Слънцето, G - гравитационна константа.

Това е приблизителната форма на закона, получена като се има пред вид, че масата на коя да е от планетите $m \ll M_{\odot}$. В точен вид за две тела с маси m_1 и m_2 , движещи се с период T около общия си център на масите, законът е:

$$a^3/T^2 = G(m_1 + m_2)/4\pi^2$$

където a е голямата полуос на орбитата на едно от телата, описвана в координатна система, в която другото тяло се приема за неподвижно.



Ако едно тяло се движи около друго тяло по елипса с голяма полуос a , то неговият период ще бъде един и същ, независимо от това каква е малката полуос на елипсата, т.е. независимо от ексцентрицитета на елипсата. Показаните на фигурата орбити имат различен ексцентрицитет, но еднаква голяма полуос. Орбиталният период е един и същ за тела, движещи се по всяка от тези орбити.

Закон за запазване на енергията

Гравитационната потенциална енергия на тяло с маса m на разстояние r от централно тяло с маса M е $E_p = -GMm/r$.

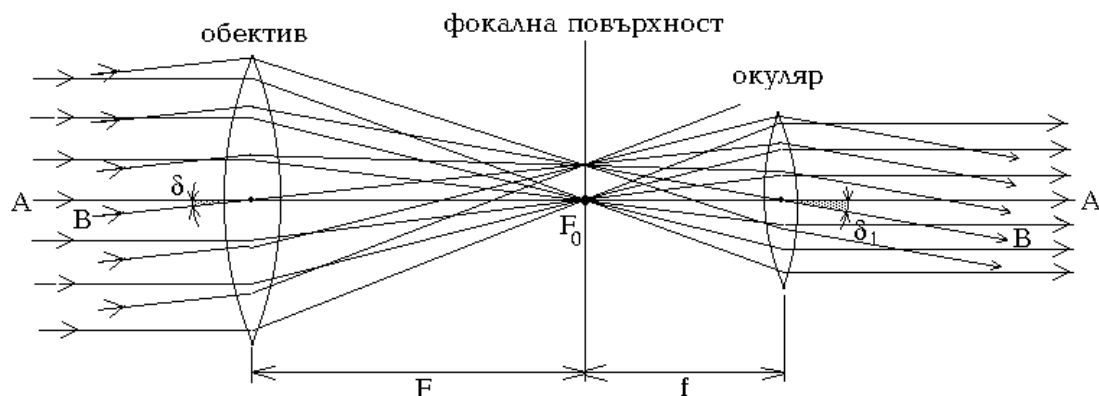
Напомняме, че кинетичната енергия е $E_k = mv^2/2$. Пълната механична енергия е $E = E_k + E_p$. Пълната механична енергия се запазва при орбиталното движение около централно тяло.

Пълната механична енергия по орбити с еднаква голяма полуос около едно и също централно тяло е еднаква. Тоест, в дадена система пълната механична енергия зависи само от голямата полуос на орбитата. При движение по елипса $E < 0$, по хиперболата $E > 0$, а в граничния случай – движение по парабола – $E = 0$. С втора космическа скорост тялото тръгва по парабола.

Закон за запазване на момента на импулса

Моментът на импулса (или „ъглов момент“) е $L = mvr \sin\theta$, където m и v са масата и скоростта на обекта, r е разстоянието до централното тяло, а θ е ъгълът между векторите v и r . Ако няма загуба на маса или взаимодействие с трето тяло, моментът на импулса се запазва по орбитата. Ако скоростта и разстоянието в перихелий на v_p и r_p , а в афелий – v_A и r_A , то $v_p r_p = v_A r_A$.

Телескопи



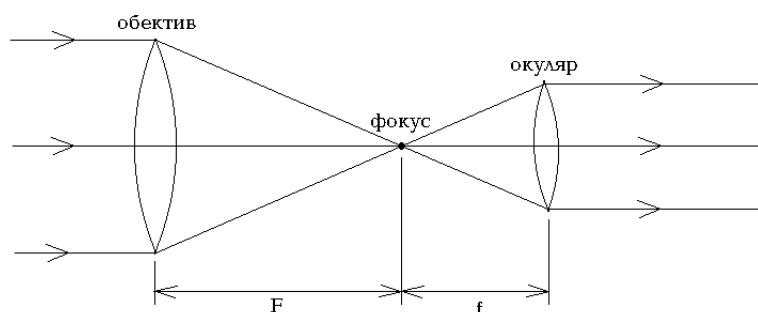
F, f - Фокусни разстояния на обектива и на окуляра на телескопа

Две звезди А и В са на ъглово разстояние δ една от друга. Те са много далеч от нас. Затова от всяка звезда върху обектива на телескопа попада успореден сноп светлинни лъчи. Нека телескопът е насочен точно към звездата А. Светлинният сноп лъчи, идващ от нея, е успореден на оптическата ос на телескопа. Пречупвайки се от обектива, той се събира в главния фокус F_0 . Светлинният сноп от звездата В е наклонен на ъгъл δ към снопа от звездата А и към оптическата ос на телескопа. Той се събира в друг фокус, лежащ на фокалната повърхност на обектива. След преминаването си през окуляра светлинните лъчи от А и от В отново стават успоредни снопове светлина. Те сключват помежду си ъгъл $\delta_1 > \delta$. Видимото ъглово разстояние между звездите се увеличава при наблюдение с телескоп.

δ може да е също видимият ъглов размер на някакъв далечен обект.

Увеличение на телескопа:

$$M = \delta_1 / \delta = F / f$$



Телескопът е насочен към една звезда, от която върху обектива попада успореден сноп светлина. Той създава върху обектива осветеност Е. Общият светлинен поток, попадащ върху обектива, е:

$\Phi = \pi D^2 E / 4$, където D е диаметърът на обектива.

Той теоретично е равен на светлинния поток, излизащ от окуляра, и попадащ в окото на наблюдателя. Светлинният сноп, излизащ от окуляра, е по-концентриран.

Осветеността, създавана в окото на наблюдателя, е:

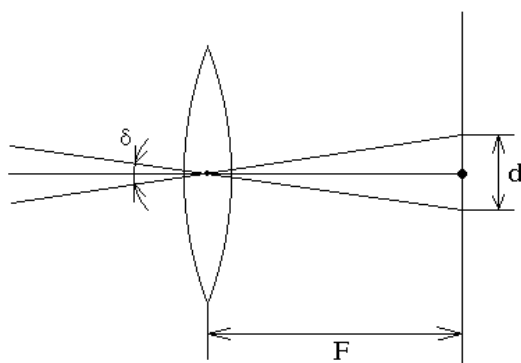
$E_1 = 4\Phi / \pi D_1^2$, където D_1 е диаметърът на окуляра. Следователно $E_1 = E \times D^2 / D_1^2$.

Ето защо звездата, наблюдавана през телескоп, се вижда D^2 / D_1^2 пъти по-ярка, отколкото когато я гледаме с просто око (в случай че изходният отвор на окуляра е с размера на зеницата на окото). Така с телескоп могат да се виждат звезди, които са по-слаби по блясък от най-слабите видими с просто око звезди.

Проникващата способност на телескопа се характеризира със звездната величина на най-слабите звезди, видими през него:

$$m_{\text{lim}} = 7.5 + 5 \lg D [\text{cm}]$$

където D е диаметърът на обектива в сантиметри.



Мащаб на изображенията на обектите:

Ако във фокалната плоскост на обектива на телескопа поставим фотоплака (или CCD камера), и наблюдаваме обект с ъглов размер δ , полученото на фотоплаката изображение на обекта ще има линеен размер:

$$d = \delta F,$$

в случай, че δ е в радиани, или

$$d = \delta'' F / 206265,$$

в случай че δ е в ъгови секунди, а F е фокусното разстояние на обектива на телескопа, изразено в същите мерни единици, както d .

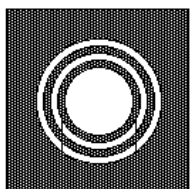
Относителен отвор (светлосила): Осветеността, която един протяжен обект създава във фокалната повърхност на обектива на телескопа, е пропорционална на $(D/F)^2$, където D и F са съответно диаметърът и фокусното разстояние на обектива. Затова величината:

$$A = D/F$$

наречена относителен отвор на обектива на телескопа, е важна негова характеристика. Телескопите с голям относителен отвор са подходящи за наблюдение и фотографиране на мъгляви обекти, като мъглявини, галактики, комети и др.

Разделителната способност на телескопа се характеризира с най-малкото ъгово разстояние между два обекта, при което те могат да се наблюдават като отделни един от друг с телескопа.

Поради огромните разстояния до звездите, с нашите телескопи ние ги наблюдаваме като точкови източници на светлина. Изображението на една звезда във фокалната повърхност на обектива на телескопа, обаче, не е точка.



Дифракцията на светлината (изкривяването на светлинните лъчи, минаващи близо до външната граница на обектива) е причина то да се получава като светъл кръг с редуващи се концентрични тъмни и светли пръстени около него. Те могат да се видят със силно увеличение при наблюдение с малък телескоп. При големите телескопи подобна дифракционна картина не може да се види поради влиянието на турбулентните движения на въздуха в земната атмосфера.

Светлият кръг се нарича дифракционен диск или диск на Ейри и неговият ъгов радиус α се приема за величина, характеризираща разделителната способност на телескопа. Образите на всички звезди, наблюдавани с един телескоп, са дифракционни дискове с еднакви размери. Тези размери зависят само от телескопа и нямат нищо общо с действителните размери на звездите. Минималното ъгово разстояние между две звезди, които могат да бъдат различени като отделни с телескопа, е от порядъка на α .

За светлинните вълни с различни дължини α е различен, като най-малък е за най-късите вълни, а най-голям - за най-дългите. Разделителната способност на телескопа е по-добра за по-късите вълни, отколкото за по-дългите.

$\alpha \text{ [rad]} = 1.22\lambda/D$, където D е диаметърът на обектива на телескопа, изразен в същите мерни единици, както λ , а λ е дължината на светлинните вълни.

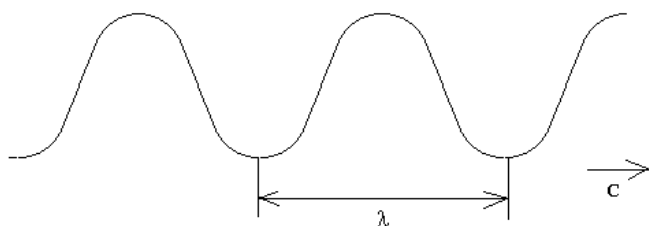
Ако α е в ъгови секунди, D - в cm, а $\alpha = 5500 \text{ \AA}$ (ангстрьома; $1 \text{ ангстрьом} = 10^{-8} \text{ cm}$), то: $\alpha'' = 14 / D$, което се приема за характеристика на разделителната способност на телескопа във видима светлина.

Разделителната способност на човешкото око е около $2'$ (2 ъгови минути).

Поради турбулентните движения на въздушни маси с различна плътност изображенията на обектите, наблюдавани с телескоп, се изкривяват и размиват.

Влиянието на атмосферата ограничава разделителната способност на наземните телескопи до около $1''$. Това означава, че и най-големите наземни телескопи, макар да имат много добра теоретична разделителна способност, на практика далеч не могат да я достигнат, а работят с разделителната способност на малките любителски телескопи. По-големи успехи се постигат чрез използване на адаптивна оптика или спекл-интерферометрия.

Светлинни вълни и ефект на Доплер



λ — дължина на вълната
 $c = 300\,000\text{ km/s}$ — скорост на разпространение на светлината във вакуум
 $T = \lambda/c$ — период на светлинната вълна
 $\nu = 1/T$ — честота на вълните
 $c = \lambda\nu$ — важно съотношение!

То показва, че тъй като всички светлинни вълни се разпространяват с еднаква скорост, не може да има светлинни вълни с произволни комбинации между дължина и честота. От дължината на светлинната вълна еднозначно се определя нейната честота и обратното. Колкото са по-дълги вълните, толкова по-нискочестотни са и обратното.

Ако източник, излъчващ светлина с дължина на вълната λ_0 и честота ν_0 , се отдалечава от наблюдателя със скорост v , то възприеманата от наблюдателя дължина на светлинната вълна от източника е $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, а честотата е $\nu = \nu_0 - \Delta\nu$, където при $v \ll c$: $\Delta\lambda/\lambda_0 = \Delta\nu/\nu_0 = v/c$.

Ако източникът се приближава към наблюдателя, то дължината на вълната, възприемана от наблюдателя, намалява с $\Delta\lambda$, а честотата се увеличава с $\Delta\nu$.

Звездна астрофизика

L - светимост на звезда. **Светимостта** на една звезда е количеството електромагнитна енергия, излъчено от звездата за единица време (мощност на излъчване) във всички посоки.

Ако приемем, че звездата излъчва като абсолютно черно тяло, според закона на Стефан-Болцман единица повърхност от звездата излъчва с мощност, равна на σT^4 , където $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ е константа на Стефан-Болцман, а T е температурата на звездата.

Тогава за звезда с радиус R :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

E - осветеност, създавана от звездата за даден наблюдател, намиращ се на разстояние r от нея. Осветеността, която звездата създава, е количеството електромагнитна енергия, излъчено от нея, което попада за единица време на разстояние r от звездата върху единица площ, перпендикулярна на лъчите. Мери се във W/m^2

Осветеността, създавана от източник на светлина на някакво разстояние от него, е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието: $E \sim 1/r^2$

Звезда със светимост L създава на разстояние r осветеност $E = L/(4\pi r^2)$, ако приемем, че излъчва еднакво във всички посоки.

Планета с радиус R поема осветеността E_0 от Слънцето с площта на проекцията си πR^2 , т.е светлината, която отразява за 1-ца време е с мощност $P = E_0 \pi R^2 A$. Отражателната способност A е число между 0 и 1 и зависи от повърхността на планетата. В първо приближение осветеността от планетата в пълна фаза, на разстояние r , е $E = P/(2\pi r^2)$.

m - видима звездна величина. **Видимата звездна величина** е мярка за видимия блясък на звездата, първоначално въведена от древногръцкия астроном Хипарх. Колкото по-ярка е звездата, толкова видимата ѝ звездна величина е по-малка. Най-слабите видими с просто око звезди са от звездна величина около 6^m .5.

Формула на Погсон

m_1, m_2 - видими звездни величини на две звезди

E_1, E_2 - осветености, които те създават за земния наблюдател

$$E_1/E_2 = 10^{0.4(m_2 - m_1)} = (2.512)^{m_2 - m_1}$$

или

$$m_1 = m_2 - 2.5 \lg(E_1/E_2)$$

Забележка: Ако например две звезди със звездни величини m_1 и m_2 са много близо една до друга и ние ги виждаме като една звезда, то нейната звездна величина **НЕ** е $m = m_1 + m_2$! Вярното твърдение е, че общата осветеност, която тези звезди създават на земната повърхност е $E = E_1 + E_2$, където E_1 и E_2 са осветеностите, създавани от всяка от двете звезди (събират се осветеностите, а не звездните величини).

M – абсолютна звездна величина. Абсолютната звездна величина е звездната величина, която звездата би имала, ако се намираше на разстояние 10 pc от нас.

Връзка между M и m на една звезда и разстоянието r до нея:

$$M = m + 5 - 5 \lg r [\text{pc}]$$

Връзка между M и m на една звезда и паралакса π :

$$M = m + 5 + 5 \lg \pi''$$

Връзка между светимостта L и **болOMETричната** абсолютна звездна величина M на една звезда:

$$M = M_C - 2.5 \lg(L/L_C) \text{ или } L/L_C = 2.512^{M_C - M}$$

където $M_C = 4^m$.75 е болOMETричната абсолютна звездна величина на Слънцето, а L_C е светимостта на Слънцето.

Забележка: Осветеност от звездата може да се измерва и само в отделни спектрални диапазони, използвайки филтри. Поради това, всяка звезда има много звездни величини – по една във всеки филтър (напр. B, V, R, J, H, K и т.н.). Всички звездни величини на Вега са 0^m .03. Ако филтърът не е изрично упоменат, под “звездна величина” се подразбира тази във филтър V, т.е. визуалната.

БолOMETричната звездна величина характеризира светенето на звездата в целия електромагнитен спектър. Разликата между нея и визуалната (във филтър V) звездна величина се нарича „болOMETрична корекция”: $BC = m_{\text{bol}} - m_V$. За повечето звезди $BC < 0$. За спектрални класове F и G BC е най-близо до 0.

За планети, астероиди и комети в Слънчевата система абсолютна звездна величина се дефинира по друг начин: звездната величина, която тялото би имало, ако се намира на 1AU и от Слънцето, и от наблюдателя, и е в пълна фаза.

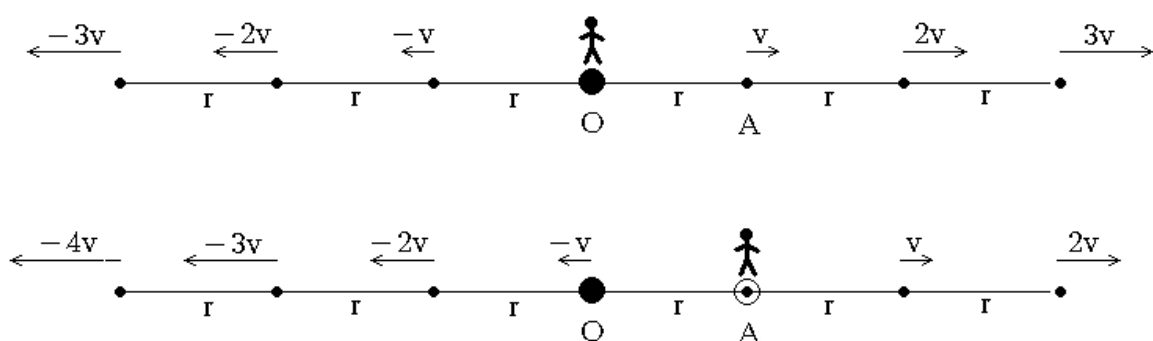
Космология

Закон на Хъбъл за разширението на Вселената: Ако една галактика, квазар или друг далечен обект се намира на разстояние r (в pc) от нас, поради разширението на Вселената, той се отдалечава от нас със скорост:

$$v = Hr$$

където v е в km/s, $H = 70 \text{ km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ е константата на Хъбъл.
 $1\text{Mpc (мегапарсек)} = 10^6 \text{ pc}$.

O - нашата Галактика, A - друга галактика



С малки кръгчета са означени галактики, отдалечени на еднакви разстояния r една от друга. Съгласно закона на Хъбъл при увеличение на разстоянието от нас до обекта 2, 3, 4, ... пъти, неговата скорост на отдалечаване от нас също се увеличава съответно 2, 3, 4, ... пъти.

Затова не съществува център на Вселената, от който да става разширението.

Разширението на Вселената изглежда по еднакъв начин, независимо от коя точка на Вселената го наблюдаваме - дали от нашата Галактика O или от друга галактика A.

Критична плътност:

$$\rho_c = 3H^2/(8\pi G) \sim 10^{-29} [\text{g/cm}^3]$$

където $G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{sec}^{-2}]$ е гравитационната константа. Ако действителната средна плътност на материята във Вселената е по-малка или равна на ρ_c , то Вселената вечно ще се разширява. Това означава, че гравитационните сили, упражнявани от тази материя, няма никога да са способни да спрат разширението на Вселената, което става по инерция в резултат на началния тласък, даден от Големия взрив. Ако действителната средна плътност на материята във Вселената е по-голяма от ρ_c , то в бъдеще трябва да настъпи момент, когато разширението на Вселената ще спре и тя да започне да се свива. Към 2016 г. се счита, че Вселената се разширява с ускорение, което се обяснява с т.нар. *тъмна енергия*.

Някои математически формули

Ъгли:

$$\alpha^{\circ} = \alpha^{\text{rad}} \times 180 / \pi$$

$$\alpha^{\text{rad}} = \alpha^{\circ} \times \pi / 180$$

Тригонометрични функции:

$$\sin \alpha = a/c$$

$$\cos \alpha = b/c$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a/b$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = b/a$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

Логаритми:

$$a = b^c \text{ - степенуване}$$

$$b = \sqrt[n]{a} \text{ - коренуване}$$

$$c = \log_b a \text{ - логаритмуване}$$

$$b \text{ - основа, } a \text{ - степен}$$

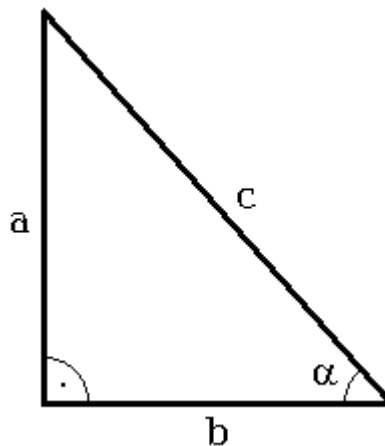
$$c \text{ - степенен показател}$$

$$\log_{10} x = \lg x \text{ - обозначение на десетичен логаритъм}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$



Забележка:

$$\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y !$$

Израз от този вид не може да се опорсти по подобен начин!

Формули за приближено изчисление:

Ако $\alpha \ll 1 \text{ rad}$, то:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha [\text{rad}]$$

Ако $x \ll 1$, то:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

или в частност:

$$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + x/2$$

$$1/(1 + x)^{1/2} \approx 1 - x/2.$$